高鳴數學團隊提供
112 學年度學科能力測驗數 A 試題詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 若在計算器中鍵入某正整數 N，接著連按「$\sqrt{\ }$」鍵(取正平方根)3 次，視窗顯示得到答案為 2，則 N 等於下列哪一個選項？
(1) 2^3　(2) 2^4　(3) 2^6　(4) 2^8　(5) 2^{12}

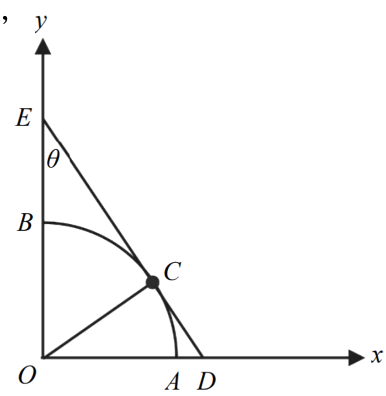
詳解：(4)

$\because$ 總共開了 3 次根號 $\sqrt{\sqrt{\sqrt{N}}}=2$

$\therefore N=((2^2)^2)^2=2^8$，

故選(4)。

2. 坐標平面上，以原點 O 為圓心，1 為半徑作圓，分別交坐標軸正向於 A、B 兩點。在第一象限的圓弧上取一點 C 作圓的切線分別交兩軸於點 D、E，如圖所示。令 $\angle OEC=\theta$，試選出為 $\tan\theta$ 的選項。



(1) $\overline{OE}$
(2) $\overline{OC}$
(3) $\overline{OD}$
(4) $\overline{CE}$
(5) $\overline{CD}$

詳解：(5)

$\because \angle OCE=\angle OCD=90^\circ$

$\angle OED+\angle ODE=\angle COD+\angle ODE=90^\circ \Rightarrow \angle OED=\angle COD$

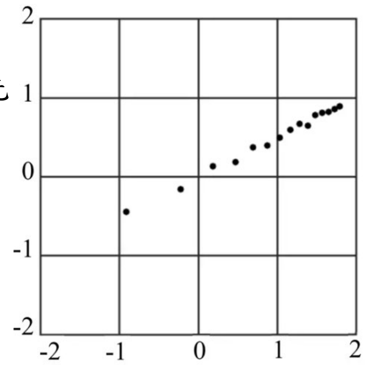
$\therefore \Delta CEO \sim \Delta COD$ (AA 相似)

$\Rightarrow \angle COD=\angle OED=\theta$

$\Rightarrow \tan\theta=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{OC}}=\dfrac{\overline{CD}}{1}=\overline{CD}$，

故選(5)。

3. 某生推導出兩物理量s,t應滿足一等式。為了驗證其理論，他做了實驗得到 15 筆兩物理量的數據(s_k,t_k)，$k=1,\cdots,15$。老師建議他將其中的t_k先取對數，在坐標平面上標出對應的點$\left(s_k,\log t_k\right)$，$k=1,\cdots,15$，如圖所示；其中第一個數據為橫軸坐標，第二個數據為縱軸坐標。利用迴歸直線分析，某生印證了其理論。試問該生所得的s,t的關係式最可能為下列哪一選項？



(1) $s=2t$ (2) $s=3t$ (3) $t=10^s$
(4) $t^2=10^s$ (5) $t^3=10^s$

詳解： (4)

圖中數據線斜率$\approx\dfrac{1}{2}$，

可得s與$\log t$的關係接近$\log t=\dfrac{1}{2}s\Rightarrow t^2=10^s$，

故選(4)。

4. 將數字1、2、3、...、9等9個數字排成九位數(數字不得重複)，使得前5位從左至右遞增、且後5位從左至右遞減。試問共有幾個滿足條件的九位數？

(1) $\dfrac{8!}{4!4!}$ (2) $\dfrac{8!}{5!3!}$ (3) $\dfrac{9!}{5!4!}$ (4) $\dfrac{8!}{5!}$ (5) $\dfrac{9!}{5!}$

詳解： (1)

由前5遞增，後5遞減，得知中間必為最大數9。

而其他可視為分兩組各選4數，再由小至大排列，

得所求$=C_4^8\times C_4^4=C_4^8=\dfrac{8!}{4!4!}$，

故選(1)。

5. 已知坐標空間中 P、Q、R 為平面 $2x-3y+5z=\sqrt{7}$ 上不共線三點。另

$\overrightarrow{PQ}=(a_1,b_1,c_1)$，$\overrightarrow{PR}=(a_2,b_2,c_2)$。試選出下列行列式中**絕對值**為最大的選項。

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

詳解：(2)

令空間中一向量 $\overrightarrow{PS}=(x,y,z)$

以「平行六面體體積＝平行六面體體積」進行計算

① 由 $\overrightarrow{PS}$、$\overrightarrow{PQ}$、$\overrightarrow{PR}$ 所張平行六面體體積 $=\left|\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right|$ (各選項的表示法)

② $\because$ 平面方程式法向量 $(2,-3,5)$ 為 $\overrightarrow{PQ}$、$\overrightarrow{PR}$ 法向量的公垂向量

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ 可設此公垂向量的倍數，因此令 $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=(2t,-3t,5t)$

平行六面體體積 $=\left|\overrightarrow{PS}\cdot(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})\right|=\left|(x,y,z)\cdot(2t,-3t,5t)\right|=\left|2tx-3ty+5tz\right|$

由①② $\Rightarrow \left|\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right| = \left|2tx-3ty+5tz\right|$

故最終將各選項之 $\overrightarrow{PS}=(x,y,z)$ 代入 $\left|2x-3y+5z\right|$ 求得最大值者即為所求。

(1) $\left|2t\cdot(-1)-3t\cdot 1+5t\cdot 1\right|=0$ (2) $\left|2t\cdot 1-3t\cdot(-1)+5t\cdot 1\right|=\left|10t\right|$

(3) $\left|2t\cdot 1-3t\cdot 1+5t\cdot(-1)\right|=\left|6t\right|$ (4) $\left|2t\cdot(-1)-3t\cdot(-1)+5t\cdot 1\right|=\left|6t\right|$

(5) $\left|2t\cdot(-1)-3t\cdot(-1)+5t\cdot(-1)\right|=\left|4t\right|$

故選(2)。

6. 坐標空間中，考慮邊長為1的正立方體，固定一頂點O。從O以外的七個頂點隨機選取相異兩點，設此兩點為P、Q，試問所得的內積$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$之期望值為下列哪一個選項？

(1) $\frac{4}{7}$ (2) $\frac{5}{7}$ (3) $\frac{6}{7}$ (4) 1 (5) $\frac{8}{7}$

詳解：(3)

令$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 為O點相鄰三邊之向量(兩兩垂直)

則其餘可能的向量為$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}$、$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$、$\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$

令內積值為x

① $x=0$：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$、$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$、

$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}$、$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{b}$、$(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\cdot\overrightarrow{a}$，共有6種

② $x=1$：$\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$、$\overrightarrow{b}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$、$\overrightarrow{c}\cdot(\overrightarrow{c}+\overrightarrow{a})$、

$\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})$、$\overrightarrow{b}\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$、$\overrightarrow{c}\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$、

$\overrightarrow{a}\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$、$\overrightarrow{b}\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$、$\overrightarrow{c}\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$、

$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})$、$(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$、$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$，

共12種

③ $x=2$：$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$、$(\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$、

$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c})\cdot(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c})$，共3種

所求期望值$E(x)=\frac{6}{21}\times 0+\frac{12}{21}\times 1+\frac{3}{21}\times 2=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$，

故選(3)。

二、多選題

7. 某公司有甲、乙兩新進員工，兩人同時間入職且起薪相同。公司承諾給甲、乙員工調薪的方式如下：
甲：工作滿 3 個月，下個月開始月薪增加 200 元；
以後再每滿 3 個月皆依此方式調薪。
乙：工作滿 12 個月，下個月開始月薪增加 1000 元；
以後再每滿 12 個月皆依此方式調薪
根據以上敘述，試選出正確的方式。

(1) 甲工作滿 8 個月後，第 9 個月的月薪比第 1 個月的月薪增加 600 元
(2) 工作滿一年後，第 13 個月甲的月薪比乙的月薪高
(3) 工作滿 18 個月後，第 19 個月甲的月薪比乙的月薪高
(4) 工作滿 18 個月時，甲總共領到的薪水比乙總共領到的薪水少
(5) 工作滿兩年後，在第 3 年的 12 個月中，恰有 3 個月甲的月薪比乙月薪高

詳解：(3)(5)

設甲、乙基礎薪資 x 元，工作滿 y 個月，則 y 個月後兩人的薪資分別為

甲：$x+200\left[\dfrac{y}{3}\right]$元　　乙：$x+1000\left[\dfrac{y}{12}\right]$元

(1) X：$x+200\left[\dfrac{8}{3}\right]=x+2\times200\Rightarrow$ 多了 400 元

(2) X：甲：$x+200\left[\dfrac{12}{3}\right]=x+4\times200$

乙：$x+200\left[\dfrac{12}{12}\right]=x+1\times1000$

(3) O：甲：$x+200\left[\dfrac{18}{3}\right]=x+6\times200$

乙：$x+200\left[\dfrac{18}{12}\right]=x+1\times1000$

(4) X：甲：1-3 月：x　　10-12 月：$x+600$
4-6 月：$x+200$　　13-15 月：$x+800$
7-9 月：$x+400$　　16-18 月：$x+1000$　　甲共$18x+9000$元
乙：1-12 月：x　　13-18 月：$x+1000$　　乙共$18x+6000$元

(5) O：乙工作滿兩年薪資 $x+2000$

$\left[\dfrac{y}{3}\right]>10\rightarrow y\geq33$ 甲至少要工作滿 33 個月才會大於乙

$\Rightarrow 36-33=3$

故選(3)(5)。

8. 某抽獎遊戲單次中獎機率為 0.1，每次中獎與否皆為獨立事件。對每一正整數 n，令 p_n 為玩此遊戲 n 次至少中獎 1 次的機率。試選出正確的選項。

(1) $p_{n+1} > p_n$

(2) $p_3 = 0.3$

(3) $\langle p_n \rangle$ 為等差數列

(4) 玩此遊戲兩次以上，第一次未中獎且第二次中獎的機率等於 $p_2 - p_1$

(5) 玩此遊戲 n 次且 $n \geq 2$ 時，至少中獎 2 次的機率等於 $2p_n$

詳解：(1)(4)

至少中獎一次=(全部情況)−(完全沒中獎)$\Rightarrow p_n = 1-(0.9)^n$

(1) O：$p_{n+1} - p_n = 1-(0.9)^{n+1} - (1-(0.9)^n)$

$= (0.9)^n - (0.9)^{n+1} > 0$

(2) X：$p_3 = 1-(0.9)^3 = 1-0.729 = 0.271$

(3) X：$p_1 = 1-(0.9)^1 = 0.1$

$p_2 = 1-(0.9)^2 = 0.19$

$p_3 = 1-(0.9)^3 = 0.271$

$p_3 - p_2 \neq p_2 - p_1$，因此$< p_n >$非等差數列

(4) O：$p_2 - p_1 = 0.19 - 0.1 = 0.09$

第一次未中獎且第二次中獎的機率為$0.9 \times 0.1 = 0.09$

(5) X：當 $n = 2$ 時，至少中獎 2 次的機率為$0.1 \times 0.1 = 0.01 \neq 2p_2$

$(2p_2 = 0.19 \times 2 = 0.38)$

故選(1)(4)。

9. 設 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$ 是首項為 3 且公比為 $3\sqrt{3}$ 的等比數列。試選出滿足不等式 $\log_3 a_1-\log_3 a_2+\log_3 a_3-\log_3 a_4+\ldots+(-1)^{n+1}\log_3 a_n>18$ 的項數 n 之可能選項。

(1) 23　(2) 24　(3) 25　(4) 26　(5) 27

詳解：(3)(5)

$\log_3 a_1-\log_3 a_2+\log_3 a_3-\log_3 a_4+\ldots.+(-1)^{n+1}\log_3 a_n$

$=1-(1+\frac{3}{2})+(1+2\times\frac{3}{2})-(1+3\times\frac{3}{2})\ldots+(-1)^{n+1}(1+(n-1)\frac{3}{2})$

經由上式規律知曉相鄰兩項和為 $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{-3}{2}$

$n=23\Rightarrow$ 總和 $=1+\frac{3}{2}\times 11=\frac{35}{2}$ (相鄰兩項和 $\frac{3}{2}$ 共 11 組)

$n=24\Rightarrow$ 總和 $=\frac{-3}{2}\times 12=\frac{-36}{2}=-18$

$n=25\Rightarrow$ 總和 $=1+\frac{3}{2}\times 12=19$

$n=26\Rightarrow$ 總和 $=\frac{-3}{2}\times 13=\frac{-39}{2}$

$n=27\Rightarrow$ 總和 $=1+\frac{3}{2}\times 13=\frac{41}{2}$

故選(3)(5)。

10. 考慮坐標平面上的直線L: $5y+(2k-4)x-10k=0$ (其中 k 為一實數)，以及長方形$OABC$，其頂點坐標為$O(0,0)$、$A(10,0)$、$B(10,6)$、$C(0,6)$。設L分別交直線OC、直線AB於點D、E。試選出正確的選項。

(1) 當$k=4$時，直線L通過點A

(2) 若直線L通過點C，則L的斜率為$-\frac{5}{2}$

(3) 若點D在線段$\overline{OC}$上，則$0\le k\le 3$

(4) 若$k=\frac{1}{2}$，則線段$\overline{DE}$在長方形$OABC$內部(含邊界)

(5) 若線段$\overline{DE}$在長方形$OABC$內部(含邊界)，則L的斜率可能為$\frac{3}{10}$

詳解： (1)(3)(5)

(1) O：$k=4\Rightarrow L:4x+5y-40=0$

$A(10,0)$代入符合方程式

(2) X：$C(0,6)$代入$L\Rightarrow 30-10k=0\Rightarrow k=3$

$\Rightarrow L:2x+5y-30=0\Rightarrow m_L=\frac{-2}{5}$

(3) O：D若在$\overline{OC}$上，k的範圍

最小：$O(0,0)$代入$L\Rightarrow -10k=0\Rightarrow k=0$

最大：$C(0,6)$代入$L\Rightarrow 30-10k=3\Rightarrow k=3$

$\therefore 0\le k\le 3$

(4) X：$k=\frac{1}{2}\Rightarrow L:-3x+5y-5=0$

L與直線OC交於$D=(0,1)$

L與直線AB交於$E=(10,7)\Rightarrow$不會在長方形$OABC$內部

$\therefore\overline{DE}$不會在長方形$OABC$內部

(5) O：最大斜率為過$O(0,0)$與$B(10,6)$直線斜率，$m_{\overline{BO}}=\frac{6-0}{10-0}=\frac{3}{5}$

$m_{\overline{BO}}=\frac{3}{5}\ge\frac{3}{10}\ge 0=m_{\overline{AO}}$，故$L$的斜率可能為$\frac{3}{10}$

故選(1)(3)(5)。

11. 坐標平線上，設 A、B 分別表示以原點為中心，順時針、逆時針旋轉 $90°$ 的旋轉矩陣。設 C、D 分別表示以直線 $x=y$、$x=-y$ 為鏡射軸的鏡射矩陣。試選出正確的選項。

(1) A、C 將點 $(1,0)$ 映射到同一點

(2) $A=-B$

(3) $C=D^{-1}$

(4) $AB=CD$

(5) $AC=BD$

詳解：(2)(5)

$$A=\begin{bmatrix}\cos(-90°) & -\sin(-90°)\\ \sin(-90°) & \cos(-90°)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}\cos(90°) & -\sin(90°)\\ \sin(90°) & \cos(90°)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}\cos(90°) & \sin(90°)\\ \sin(90°) & -\cos(90°)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}\cos(270°) & \sin(270°)\\ \sin(270°) & -\cos(270°)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

(1) X：$A\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}$

$C\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

(2) O：$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=-B$

(3) X：$D^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$\therefore C\neq D^{-1}$

(4) X：$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}=CD$

(5) O：$AC=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$BD=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

故選(2)(5)。

12. 令 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，試選出正確的選項。

(1) 鉛直線 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 為 $y=f(x)$ 圖形的對稱軸

(2) 若鉛直線 $x=a$ 和 $x=b$ 均為 $y=f(x)$ 圖形的對稱軸，則 $f(a)=f(b)$

(3) 在區間 $[0,2\pi)$ 中僅有一個實數 x 滿足 $f(x)=\sqrt{3}$

(4) 在區間 $[0,2\pi)$ 中滿足 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 的所有實數 x 之和不超過 2π

(5) $y=f(x)$ 的圖形可由 $y=4\sin^2\dfrac{x}{2}$ 的圖形經適當(左右、上下)平移得到

詳解：(1)(5)

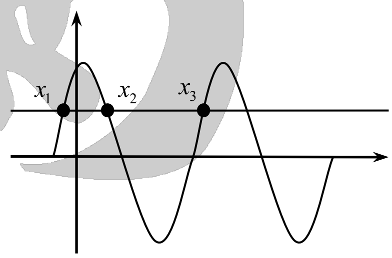
$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$

(1) O：$x=\dfrac{\pi}{6}$ 代入得 $f(\dfrac{\pi}{6})=2$，為波峰

(2) X：$f(a)$ 和 $f(b)$ 可能其中一個位置在波峰，一個在波谷

(3) X：$f(x)=\sqrt{3}\Rightarrow\sin(x+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2}{3}\pi$ $\Rightarrow x=0$ 或 $\dfrac{1}{3}\pi$



(4) X：$f(x)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\sin(x+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{1}{4}$

① $0<x_1+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow-\dfrac{\pi}{3}<x_1<-\dfrac{\pi}{6}$（不合）

② $\dfrac{5\pi}{6}<x_2+\dfrac{\pi}{3}<\pi\Rightarrow\dfrac{\pi}{2}<x_2<\dfrac{2}{3}\pi$

③ $2\pi<x_3+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{13}{6}\pi\Rightarrow\dfrac{5}{3}\pi<x_3<\dfrac{11}{6}\pi$

由①②③$\Rightarrow\dfrac{13}{6}\pi<x_2+x_3<\dfrac{15}{6}\pi$

(5) O：$y=4\sin^2\dfrac{x}{2}=4(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}})^2=4\times\dfrac{1-\cos x}{2}=2-2\cos x$

振幅、週期相等，故平移後可重合

故選(1)(5)。

三、選填題

13. 某間新開幕飲料專賣店推出果汁、奶茶、咖啡三種飲料，前3天各種飲料的銷售數量（單位：杯）與收入總金額（單位：元)如下表，例如第一天果汁、奶茶、咖啡的銷售量分別為60杯、80杯與50杯，收入總金額為12900元。已知同一種飲料每天的售價皆相同，則咖啡每杯的售價為 ⑬-1⑬-2 元

	果汁（杯）	奶茶（杯）	咖啡（杯）	收入總金額（元）
第1天	60	80	50	12900
第2天	30	40	30	6850
第3天	50	70	40	10800

詳解： 80

令果汁為 x 元，奶茶為 y 元，咖啡為 z 元

由題可得三元一次方程式：$\begin{cases} 60x+80y+50z=12900...(1) \\ 30x+40y+30z=6850...(2) \\ 50x+70y+40z=10800...(3) \end{cases}$

由(1)式 $-2\times$(2)式 $\Rightarrow -10z=-800 \Rightarrow z=80$

故咖啡價格為80元。

14. 設 a,b 為實數（其中 $a>0$），若多項式 $ax^2+(2a+b)x-12$ 除以 $x^2+(2-a)x-2a$ 所得餘式為6，則對數 $(a,b)=($ ⑭-1 , ⑭-2⑭-3 $)$

詳解： $(3,-9)$

由於被除式及除式皆為二次式，可知商式為一常數 Q

$ax^2+(2a+b)x-12=[x^2+(2-a)x-2a]Q+6$

經比較係數後，可知 $Q=a$

$ax^2+(2a+b)x-12=[x^2+(a-2)x-2a]a+6$

$\Rightarrow ax^2+(2a+b)x-12=ax^2+(a^2-2a)x-2a^2+6$

比較係數可知：$\begin{cases} 2a+b=a^2-2a \\ -12=-2a^2+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-9 \end{cases}$

15. 設 O、A、B 為坐標平面上不共線三點，其中向量 $\overrightarrow{OA}$ 垂直 $\overrightarrow{OB}$。若 C、D 兩點在直線 AB 上，滿足 $\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$，$3\overrightarrow{AD}=8\overrightarrow{BD}$ 且 $\overrightarrow{OC}$ 垂直 $\overrightarrow{OD}$，則 $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=$ $\underline{\frac{⑮-1}{⑮-2}}$（化為最簡分數）

詳解：$\underline{\frac{3}{4}}$

$\overrightarrow{OC}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ ……①

$3\overrightarrow{AD}=8\overrightarrow{BD}\Rightarrow 3(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA})=8(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB})$

$\Rightarrow 5\overrightarrow{OD}=8\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OA}\Rightarrow\overrightarrow{OD}=\frac{8}{5}\overrightarrow{OB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}$ ……②

因 $\overrightarrow{OC}$ 垂直 $\overrightarrow{OD}\Rightarrow\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=0$，①式與②式代入得

$(\frac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB})\cdot(\frac{8}{5}\overrightarrow{OB}-\frac{3}{5}\overrightarrow{OA})=0\Rightarrow\frac{16}{25}\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\frac{9}{25}\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=0$

（因 $\overrightarrow{OA}$ 垂直 $\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$）

$\Rightarrow\frac{16}{25}\overline{OB}^2=\frac{9}{25}\overline{OA}^2\Rightarrow(\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}})^2=\frac{9}{16}\Rightarrow\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\pm\frac{3}{4}$（負不合）

16. 令 $E:x+z=2$ 為坐標空間中過三點 $A(2,-1,0)$、$B(0,1,2)$、$C(-2,1,4)$ 的平面。另有一點 P 在平面 $z=1$ 上且其於 E 之投影點與 A、B、C 三點等距離。則點 P 與平面 E 的距離為 $\underline{⑯-1\sqrt{⑯-2}}$。(化為最簡根式)

詳解：$\underline{2\sqrt{2}}$

設 P 點為 $(a,b,1)$

$(a-2)^2+(b+1)^2+1^2=a^2+(b-1)^2+1^2=(a+2)^2+(b-1)^2+3^2$

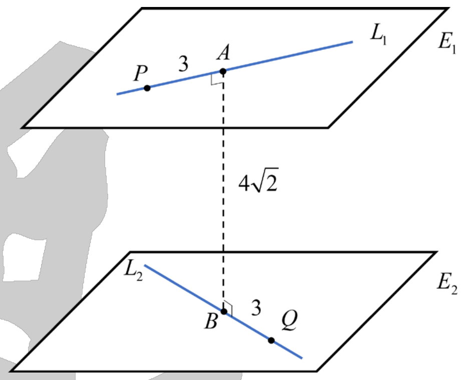
$\Rightarrow\begin{cases}a^2-4a+4+b^2+2b+1+1=a^2+b^2-2b+1+1\\a^2+b^2-2b+1+1=a^2+4a+4+b^2-2b+1+9\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}-4a+4b=-4\\-4a=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=-4\end{cases}$，得 $P(-3,-4,1)$

故距離為 $d=\frac{|-3+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

17. 坐標空間中有兩不相交直線 $L_1:\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}$，$t$ 為實數、$L_2:\begin{cases}x=2+2s\\y=5+s\\z=6-s\end{cases}$，$s$ 為實數，另一直線 L_3 與 L_1、L_2 皆相交且垂直。若 P、Q 兩點分別在 L_1、L_2 上且與 L_3 之距離皆為3，則 P、Q 兩點的距離為 ⑰-1 $\sqrt{⑰\text{-}2}$ 。(化為最簡根式)

詳解： $5\sqrt{2}$



令直線 L_1 方向向量 $\overrightarrow{d_1}(1,-1,1)$

直線 L_2 方向向量 $\overrightarrow{d_2}(2,1,-1)$

計算 $\overrightarrow{d_1}\times\overrightarrow{d_2}=(0,3,3)//(0,1,1)$

則包含 L_1 且平行 L_2 的平面 E_1 為 $y+z=3$，

包含 L_2 且平行 L_1 的平面 E_2 為 $y+z=11$

得 $\left|\overrightarrow{AB}\right|=d(E_1,E_2)=\dfrac{|11-3|}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$

所求 $=\overline{PQ}=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}\right|=\sqrt{\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}\right|^2}$

$=\sqrt{\left|\overrightarrow{PA}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BQ}\right|^2+2(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{PA})}$

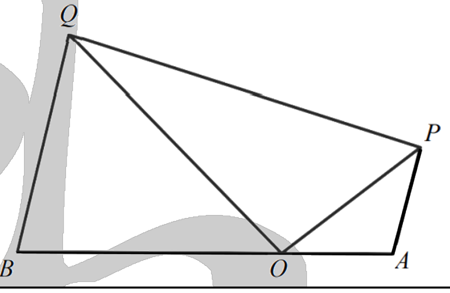
$=\sqrt{3^2+(4\sqrt{2})^2+3^2+2(0+0+0)}=\sqrt{9+32+9+0}=5\sqrt{2}$

(因 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{AB}$ 且 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BQ}$ 且 $\overrightarrow{BQ}\perp\overrightarrow{PA}$)

第貳部分：混合題或非選擇題

18-20 題為題組

坐標平面上 O 為原點，給定 $A(1,0)$、$B(-2,0)$ 兩點。另有兩點 P、Q 在上半平面，且滿足 $\overline{AP}=\overline{OA}$、$\overline{BQ}=\overline{OB}$、$\angle POQ$ 為直角，如圖所示。令 $\angle AOP=\theta$。根據上述，試回答下列問題。

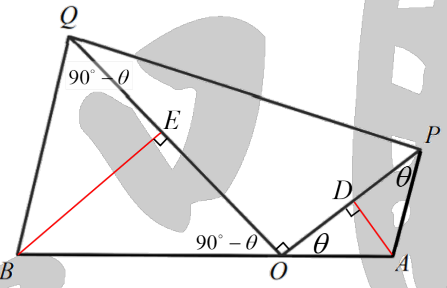


18. 線段 $\overline{OP}$ 長為下列哪一選項？
(1) $\sin\theta$　(2) $\cos\theta$　(3) $2\sin\theta$　(4) $2\cos\theta$　(5) $\cos 2\theta$

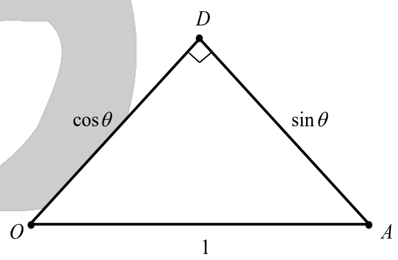
詳解：(4)

設 ΔODA 中 $\overline{OP}$ 上的高與 $\overline{OP}$ 交於 D

ΔOQB 中 $\overline{OQ}$ 上的高與 $\overline{OQ}$ 交於 E



由上圖可得 ΔODA 如右圖



$\overline{OP}=2\overline{OD}=2\cos\theta$，同理 $\overline{OQ}=2\cdot 2\cos(90^\circ-\theta)=4\sin\theta$

故選 (4)。

19. 若 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，試求點 Q 的坐標，並說明 $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$。

詳解：$Q(\dfrac{-36}{25},\dfrac{48}{25})$

$$Q=\begin{bmatrix}\cos(90^\circ+\theta) & -\sin(90^\circ+\theta)\\ \sin(90^\circ+\theta) & \cos(90^\circ+\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot\overline{OQ}=\begin{bmatrix}-\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & -\sin\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot 4\sin\theta$$

$$=\begin{bmatrix}-\dfrac{3}{5} & -\dfrac{4}{5}\\ \dfrac{4}{5} & -\dfrac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\cdot 4\cdot\dfrac{3}{5}=\begin{bmatrix}-\dfrac{36}{25}\\ \dfrac{48}{25}\end{bmatrix}\Rightarrow Q(-\dfrac{36}{25},\dfrac{48}{25})$$

$$\overrightarrow{BQ}=(\dfrac{14}{25},\dfrac{48}{25})=2\overrightarrow{AP}=2(\dfrac{7}{25},\dfrac{24}{25})\Rightarrow\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$$

20. （承19題）試求點 A 到直線 BQ 的距離，並求四邊形 $PABQ$ 的面積。

詳解： $\dfrac{72}{25}$；$\dfrac{108}{25}$

已知四邊形 $PABQ$ 為梯形，
設四邊形 $PABQ$ 的高為 h

$$m_{QB}=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{24}{7}$$

$$\Rightarrow \overline{QB}_{eq}：24x-7y=-48$$

$$\Rightarrow d(A,\overline{QB})=\frac{|24-0+48|}{25}=\frac{72}{25}$$

$\Rightarrow$ 四邊形 $PABQ$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}(\overline{AP}+\overline{QB})\cdot h$

$$=\frac{1}{2}\cdot(1+2)\cdot\frac{72}{25}=\frac{108}{25}$$