高鳴數學團隊提供
109 學年度學科能力測驗試題詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1.已知兩個直角三角形三邊長為3,4,5、5,12,13，α,β 分別為它們的一角，如下圖所示。試選出正確的選項。

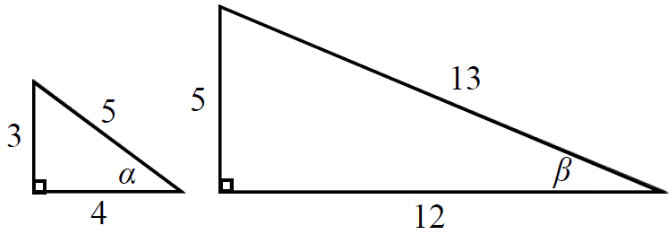
(1) $\sin\alpha > \sin\beta > \sin 30^\circ$

(2) $\sin\alpha > \sin 30^\circ > \sin\beta$

(3) $\sin\beta > \sin\alpha > \sin 30^\circ$

(4) $\sin\beta > \sin 30^\circ > \sin\alpha$

(5) $\sin 30^\circ > \sin\alpha > \sin\beta$



詳解：(2)

$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$，

依題目可得 $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$，$\sin\beta = \dfrac{5}{13}$，

$\dfrac{3}{5} > \dfrac{1}{2} > \dfrac{5}{13}$，即 $\sin\alpha > \sin 30^\circ > \sin\beta$，故選(2)。

2.空間中有相異四點 A,B,C,D，以之內積 $\overline{AB}\cdot\overline{AC} = \overline{AB}\cdot\overline{AD}$。是選出正確的選項。

(1) $\overline{AB}\cdot\overline{CD} = 0$

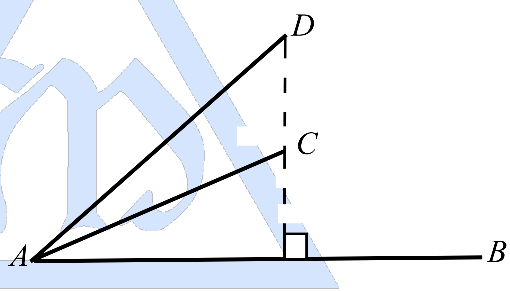
(2) $\overline{AC} = \overline{AD}$

(3) $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 平行

(4) $\overline{AD}\cdot\overline{BC} = 0$

(5) A,B,C,D 四點在同一平面上

詳解：(1)



(1)由圖可知 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 垂直，內積為零

(2)由圖可知 $\overline{AC}$ 和 $\overline{AD}$ 未必相等

(3)由(1)可知 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 垂直

(4)由圖可知 $\overline{AD}\cdot\overline{BC}$ 未必為 0

(5) $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 兩線段可能歪斜，故不一定在同一平面，故選(1)。

3. 如圖所示，O 為正六邊形之中心。試問下列哪個向量的終點 P 落在 ΔODE 內部(不含邊界)？

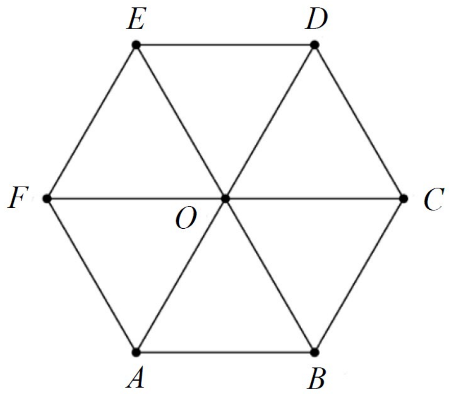
(1) $\overline{OP}=\overline{OC}+\overline{OE}$

(2) $\overline{OP}=\frac{1}{4}\overline{OC}+\frac{1}{2}\overline{OE}$

(3) $\overline{OP}=-\frac{1}{4}\overline{OC}+\frac{1}{2}\overline{OE}$

(4) $\overline{OP}=\frac{1}{4}\overline{OC}-\frac{1}{2}\overline{OE}$

(5) $\overline{OP}=-\frac{1}{4}\overline{OC}-\frac{1}{2}\overline{OE}$



詳解：　(2)

(1) P 在 D 點上

(2)在 ΔODE 中

(3)在 ΔOFE 中

(4)在 ΔOBC 中

(5)在 ΔOAB 中，故選(2)。

4.令 $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}$，$B=I+A+A^{-1}$，是選出代表 BA 的選項。

(1) $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}6&0\\0&6\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}4&-1\\-3&1\end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix}6&6\\18&24\end{bmatrix}$

詳解：　(5)

$$A^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}1&1\\3&4\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}4&-1\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-1\\-3&1\end{bmatrix},$$

$$B=I+A+A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&-1\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0\\0&6\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}6&0\\0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&6\\18&24\end{bmatrix}。$$

5.試問數線上有多少個整數點與點 $\sqrt{101}$ 的距離小於 5，

但與點 $\sqrt{38}$ 的距離大於 3？

(1)1 個　(2)4 個　(3)6 個

(4)8 個　(5)10 個

詳解：(3)

令整數點為 x

根據題意可得 $\begin{cases}\left|x-\sqrt{101}\right|<5\\ \left|x-\sqrt{38}\right|>3\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{101}-5<x<\sqrt{101}+5\\ x<\sqrt{38}-3, x>\sqrt{38}-3\end{cases}$

$\approx \begin{cases}5.05<x<15.05\\ x<3.16\text{ 或 }x>9.16\end{cases}$。

取交集得 $x=10,11,\ldots,15$，共 6 個，故選(3)。

6.連續投擲一個公正骰子兩次，設出現的點數依序為 a,b。

試問發生 $\log(a^2)+\log b>1$ 的機率為多少？

(1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) $\dfrac{2}{3}$

(4) $\dfrac{3}{4}$　(5) $\dfrac{5}{6}$

詳解：(4)

原式 $\Rightarrow \log a^2b>\log 10 \Rightarrow a^2b>10$，

則 $a=1\Rightarrow b(\text{無})$

$a=2\Rightarrow b=3,4,5,6(4\text{個})$

$a=3\Rightarrow b=2,3,4,5,6(5\text{個})$

$a=4,5,6\Rightarrow b=1,2,3,4,5,6(6\text{個})$

$\therefore P=\dfrac{4+5+3\cdot 6}{6^2}=\dfrac{3}{4}$，故選(4)。

7.坐標平面上，函數圖形 $y=-\sqrt{3}x^3$ 上有兩點 P,Q 到原點的距離皆為 1。已知點 P 坐標為 $(\cos\theta,\sin\theta)$，試問點 Q 坐標為和？

(1) $\left(\cos(-\theta),\sin(-\theta)\right)$　(2) $\left(-\cos\theta,\sin\theta\right)$

(3) $\left(\cos(-\theta),-\sin\theta\right)$　(4) $\left(-\cos\theta,\sin(-\theta)\right)$

(5) $\left(\cos\theta,-\sin\theta\right)$

詳解：　(4)

$y=-\sqrt{3}x^3 \Rightarrow$ 奇函數圖形對原點對稱

$\overline{OP}=\overline{OQ}=1 \Rightarrow Q$ 為 P 的對稱點

$\therefore Q\left(-\cos\theta,-\sin\theta\right)=\left(-\cos\theta,\sin(-\theta)\right)$，故選(4)。

二、多選題

8.有一個遊戲的規則如下：

丟公正骰子，若所得的點數滿足(A)或(B)兩個條件之一，可得到獎金 100 元；

若兩個條件都滿足，則共得 200 元獎金；駱若兩條件都不滿足，則無獎金。

(A)三個點數皆為奇數或皆為偶數

(B)三個點數由小到大為等差數列

若已知有兩個骰子的點數分別為 1,3，且所得獎金為 100 元，

則未知的骰子點殼能為何？

(1)2 (2)3 (3)4 (4)5 (5)6

詳解： (1)(2)

得 100 元$\Rightarrow$滿足(A)或(B)其中一個條件

若滿足(A)不滿足(B)第三顆骰子點數為 1,3

若滿足(B)不滿足(A)第三顆骰子點數為 2，故選(1)(2)。

9.在坐標平面上，有一通過原點O的直線L，以及一半徑為2、圓心為原點O的圓Γ。P、Q為上相異2點，且$\overline{OP}$、$\overline{OQ}$分別與L所夾的銳角皆為30°，試選出內積$\overline{OP}\cdot\overline{OQ}$之值可能發生的選項。

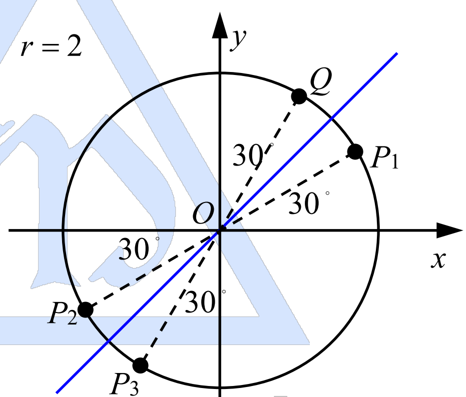
(1) $2\sqrt{3}$ (2) $-2\sqrt{3}$ (3) 0

(4) -2 (5) -4

詳解： (4)(5) $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OQ}\right|\cdot\cos\theta$ $r=2$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left|\overrightarrow{OP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OQ}\right|\cdot\cos\theta=2\cdot2\cos\theta$$

$$=\begin{cases}\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OQ}=4\cdot\cos60^\circ=2\\ \overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OQ}=4\cdot\cos120^\circ=-2\\ \overrightarrow{OP_3}\cdot\overrightarrow{OQ}=4\cdot\cos180^\circ=-4\end{cases}，$$



故選(4)(5)。

10. 考慮多項式 $f(x)=3x^4+11x^2-4$ 中，試選出正確選項。

(1) $y=f(x)$ 的圖形和 y 軸交點的 y 坐標小於 0

(2) $f(x)=0$ 有 4 個實根

(3) $f(x)=0$ 至少有一個有理根

(4) $f(x)=0$ 有一根介於 0 與 1 之間

(5) $f(x)=0$ 有一根介於 1 與 2 之間

詳解： (1)(4)

$f(x)=3x^4+11x^2-4$

(1) $x=0\Rightarrow f(0)=-4$

(2)、(3)、(4)、(5)

經十字交乘可得 $\Rightarrow(3x^2-1)(x^2+4)=0\Rightarrow 4$ 根為 $\pm 2i$ 、$\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ，

故選(1)(4)。

11.設 a,b,c 為實數且滿足 $\log a=1.1$，$\log b=2.2$，$\log c=3.3$。試選出正確的選項。

(1) $a+c=2b$

(2) $1<a<10$

(3) $1000<c<2000$

(4) $b=2a$

(5) a,b,c 成等比數列

詳解： (3)(5)

(1) $a=10^{1.1}$ 、 $b=10^{2.2}$ 、 $c=10^{3.3}\Rightarrow a+c\neq 2b$

(2) $a=10^{1.1}>10^{1}$

(3) $\log 1000<\log c<\log 2000\Rightarrow 3<3.3<3.3010$

(4) $a=10^{1.1}$ 、 $b=10^{2.2}\Rightarrow b\neq 2a$

(5) $\dfrac{b}{a}=10^{1.1}$ 、 $\dfrac{c}{b}=10^{1.1}$，故等比。

故選(3) (5)。

12.下表是2011年至2018年某國總就業人口與農業就業人口的部分相關數據，各年度的人口以人數計，有些是以千人計，有些以萬人計，例如2011年總就業人口為1,070.9萬人，65歲以上男性農業就業人口為69.1千人。

試根據表格資料選出正確的選項。

	就業人口			男性農業就業人口按年齡別分			
年別	總就業人口(萬人)	農業就業人口(萬人)	男性農業就業人口(千人)	39歲以下(千人)	40-49歲(千人)	50-64歲(千人)	65歲以上(千人)
2011年	1,070.9	54.2	386.3	67.6	85.4	164.2	69.1
2012年	1,086.0	54.4	394.9	67.5	87.0	169.5	70.9
2013年	1,096.7	54.4	391.5	66.6	83.9	171.3	69.7
2014年	1,107.9	54.8	391.2	65.8	79.8	173.0	72.6
2015年	1,119.8	55.5	403.1	71.7	76.9	181.3	73.2
2016年	1,126.7	55.7	404.5	77.4	77.4	176.4	73.3
2017年	1,135.2	55.7	405.1	73.9	78.1	178.3	74.8
2018年	1,143.4	56.1	415.1	72.0	78.8	184.9	79.4

(1)從2013年至2018年，65歲以上的男性農業就業人口逐年遞增

(2)從2013年至2018年，50歲至64歲之男性農業就業人口逐年遞增

(3)上表中，每一年的男性農業就業人口占總就業人口的比率都小百分之五

(4)上表中，每一年50歲至64歲之男性農業就業人口都少於49歲以下之男性農業就業人口

(5)就65歲以上之男性農業就業人口而言，2018年比2011年增加了不到一萬人

詳解：(1)(3)

(1)正確，由表得知(注意年分)

(2)錯誤，由表得知，中間有減少

(3)正確，1000萬人的5%是50萬人 但表中都少於50萬人

(4)錯誤，由表得知

(5)錯誤，79.4－69.1＝10.3千人＝1.03萬人，

故選(1)(3)。

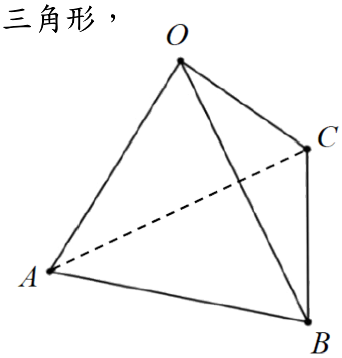
13.如圖所示，四面體$OABC$中，ΔOAB和ΔOAC均為正三角形，$\angle BOC=30^\circ$。試選出正確的選項。

(1) $\overline{BC}>\overline{OC}$

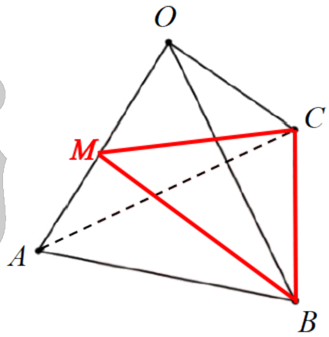
(2) ΔOBC是等腰三角形

(4) $\angle CAB=30^\circ$

(5)平面OAB和平面OAC的夾角(以銳角計) 小於30°



詳解： (2)(4)



(1) X：因大邊對大角，小邊對小角，所以$\overline{BC}<\overline{OC}$

(2) O：因ΔOAB和ΔOAC為正三角形，

所以 $\overline{OC}=\overline{OA}=\overline{OB}\Rightarrow\Delta OBC$為等腰三角形

(3) X：三角形面積公式$=\dfrac{1}{2}ab\times sinC$，

$sin\angle AOB>sin\angle BOC$，故$\Delta OBC<\Delta OAB$

(4) O：因 $\overline{OC}=\overline{AC}$， $\overline{OB}=\overline{AB}$， $\overline{BC}=\overline{BC}$，$\Delta CAB\cong\Delta COB$，

即$\angle CAB=\angle BOC=30^\circ$

(5) X：令兩面角$\angle CMB$為θ，

$$\cos\theta=\frac{\overline{BM}^2+\overline{CM}^2-\overline{BC}^2}{2\cdot\overline{BM}\cdot\overline{CM}},$$

$$\cos 30^\circ=\frac{\overline{BO}^2+\overline{CO}^2-\overline{BC}^2}{2\cdot\overline{BO}\cdot\overline{CO}},$$

其中$\overline{BO}>\overline{BM}$，則$\cos\theta<\cos 30^\circ$，故$\theta>30^\circ$

根據上述原因，故選(2)(4)。

第貳部分：選填題

A.網路賣家以 200 元的成本取得某件模型，並以成本的 5 倍作為售價，差價即為利潤。但過了一段時間無人問津，因此賣家決定以逐次減少一半利潤的方式調降售價。若依此方式進行，則調降三次後該模型的售價為 ⑭⑮⑯ 元。

詳解： 300

成本 200 元，售價 1000 元，故利潤為 $1000-200=800$ 元，
第 1 次降價，利潤 400，售價為 $400+200=600$ 元，
第 2 次降價，利潤 200，售價為 $200+200=400$ 元，
第 3 次降價，利潤 100，售價為 $100+200=300$ 元，
故所求為 300 元。

B.有一按鈕遊戲機，每投幣一枚，可按遊戲機三次。第一次按下會出現黑色或白色的機率各為 $\frac{1}{2}$；第二或第三次按下，出現與前一次同色的機率為 $\frac{1}{3}$，不同色的機率為 $\frac{2}{3}$。今某甲投幣一枚後，按三次均出現同色的機率為 $\dfrac{⑰}{⑱}$。(化為最簡分數)

詳解： $\frac{1}{9}$

$$P(\text{三次同色})=P(3\text{黑})+P(3\text{白})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$$

樹狀圖如下。

$$\begin{cases}
\text{黑}：\frac{1}{2}\begin{cases}
\text{黑}：\frac{1}{3}\begin{cases}\text{黑}：\frac{1}{3}\\ \text{白}：\frac{2}{3}\end{cases}\\
\text{白}：\frac{2}{3}\begin{cases}\text{黑}：\frac{2}{3}\\ \text{白}：\frac{1}{3}\end{cases}
\end{cases}\\
\text{白}：\frac{1}{2}\begin{cases}
\text{黑}：\frac{2}{3}\begin{cases}\text{黑}：\frac{1}{3}\\ \text{白}：\frac{2}{3}\end{cases}\\
\text{白}：\frac{1}{3}\begin{cases}\text{黑}：\frac{2}{3}\\ \text{白}：\frac{1}{3}\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}$$

C.設 S 為坐標平面上直線 $2x+y=10$ 被平行線 $x-2y+15=0$ 與 $x-2y=0$ 所結的線段(含端點)。若直線 $3x-y=c$ 與 S 有交點，則 c 的最小值為 19 20 。

詳解： -5

解聯立 $\begin{cases} 2x+y=10 \\ x-2y+15=0 \end{cases}$ ， $\begin{cases} 2x+y=10 \\ x-2y=0 \end{cases}$ ，

得 $2x+y=10$ 與 $x-2y+15=0$ 交 $(1,8)$ ， $2x+y=10$ 與 $x-2y=0$ 交 $(4,2)$ ，

若直線 $3x-y=c$ 與 S 有交點，且 c 有最小值和最大值必是 $(1,8)$ 和 $(4,2)$ ，

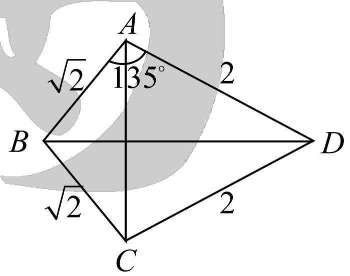
將 $(1,8)$ 和 $(4,2)$ 代入 $3x-y=c$ ， c 分別為 -5 和 10 ，

得 c 的最小值為 -5 。

D.平面上有一箏形 $ABCD$ ，其中 $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{2}$ ， $\overline{AD}=\overline{CD}=2$ ， $\angle BAD=135^\circ$ 。

則 $\overline{AC}=\dfrac{21\sqrt{22\ 23}}{24}$ (化為最簡根式)。

詳解： $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$



餘弦求 $\overline{BD} \Rightarrow \cos 135^\circ = \dfrac{2+4-\overline{BD}^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot 2}$

$\overline{BD}=\pm\sqrt{10}$ (負不合)

箏形 $ABCD$ 面積 $=\Delta ABD\cdot 2=(\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 135^\circ)\cdot 2=2$

$2=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BD}\cdot\sin 90^\circ$

$\Rightarrow 2=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\sqrt{10}\cdot 1 \Rightarrow \overline{AC}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ 。

E.空間中有三點 $A(1,7,2)$ 、 $B(2,-6,3)$ 、 $C(0,-4,1)$ 。

若直線 L 通過 A 點並與直線 BC 相交且垂直，

則 L 和直線 BC 的交點座標為

(25 26 、 27 28 、 29 30)。

詳解： $(-3,-1,-2)$

$\overline{CB}=(2,-2,2)=(1,-1,1)$ ，則 $\overline{BC}$ 之參數式為 $\begin{cases} x=0+t \\ y=-4-t \\ z=1+t \end{cases}$

令 D 點坐標 $(t,-4-t,1+t)$

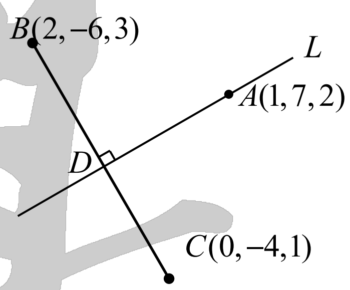
$\Rightarrow \overline{AD}=(t-1,-11-t,t-1)$

$\because \overline{AD}\perp\overline{BC}$

$\therefore \overline{AD}\cdot\overline{BC}=0$

$\Rightarrow (t-1,-11-t,t-1)\cdot(1,-1,1)=0 \Rightarrow t=-3$ ，

故 D 點坐標為 $(-3,-1,-2)$ 。



F.坐標平面上有一條拋物線 Γ ，其上有四個點構成等腰梯形，且等腰梯形的對稱軸與 Γ 的對稱軸重合。已知該等腰梯形的上底為 4 、下底為 6 、高為 14 ，

則 Γ 的焦距為 $\dfrac{31}{32\,33}$ 。

詳解： $\dfrac{5}{56}$

令拋物線方程式 $x^2=4c(Y-a)$ ，

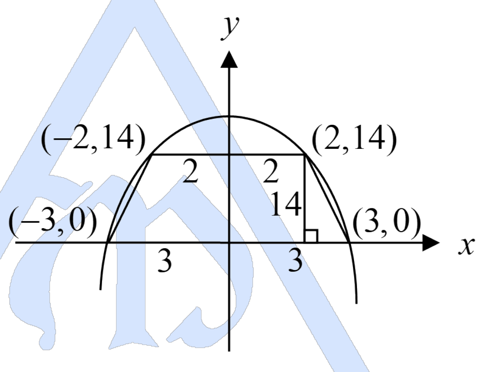
過 $(2,14),(3,0)$ 兩點

$\Rightarrow \begin{cases} 4=4c(14-a) \\ 9=4c(-a) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4=56c-4ac...(1) \\ 9=-4ac...(2) \end{cases}$

(2) 代入 (1) ，得 $c=\dfrac{-5}{56}$

$\Rightarrow$ 所求焦距 $|c|=\dfrac{5}{56}$ 。



G.設計師為天文館設計以不銹鋼片製成的月亮形狀，

其中有一款設計圖如右圖所示：

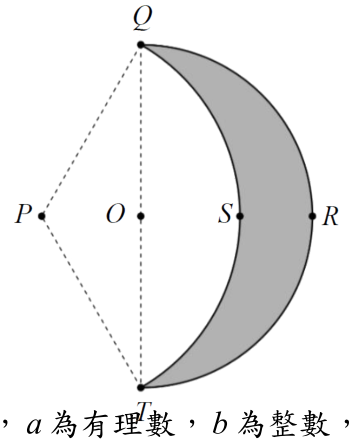
圖中，圓弧QRT是一個以O點為圓心、

$\overline{QT}$為直徑的半圓，$\overline{QT}=2\sqrt{3}$。

圓弧QST的圓心在P點，$\overline{PQ}=\overline{PT}=2$。

圓弧QRT與圓弧QST所圍出的灰色區域$QRTSQ$

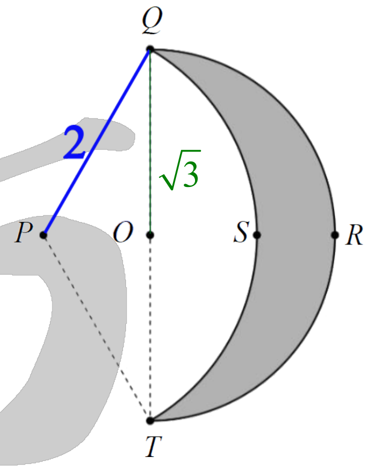
即為某一天所見的月亮形狀。



設此灰色區域的面積為$a\pi+\sqrt{b}$，其中π為圓周率，a為有理數，b為整數，

則$a=\dfrac{㉞}{㉟}$(化為最簡分數)，$b=$ ㊱ 。

詳解：$(a,b)=(\frac{1}{6},3)$



半圓QRT面積為$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\pi$

$\because \Delta POQ$為$1:\sqrt{3}:2$

$\therefore$可知$\angle QPO=60^\circ \Rightarrow \angle QPT=120^\circ$

扇形$PQST$面積$=2\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\pi$，

ΔPQT面積$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 1=\sqrt{3}$

QST面積$=$扇形$PQST$面積$-\Delta PQT$面積$=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$。

所求為月亮QRT面積$=$半圓QRT面積$-QST$面積

$=\frac{3}{2}\pi-(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3})=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$，即$(a,b)=(\frac{1}{6},3)$。