臺北區 107 學年度第一學期
第二次學科能力測驗模擬考試
數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～四冊全

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記，請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利

99363203-27

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 絕對值不等式 $x>|x-1|$ 的解為何？
   (1) $0<x<\frac{1}{2}$
   (2) $x<\frac{1}{2}$
   (3) $x>\frac{1}{2}$
   (4) $x<0$
   (5) $x>0$

2. 多項式函數 $f(x)=x^3+7x^2+23x+28$，則 $f(-1.99)$ 之值的小數點以下第二位數字為何？
   (1) 6
   (2) 7
   (3) 8
   (4) 9
   (5) 0

3. 設 x，y 均為正實數且滿足 $4x^2+\frac{1}{4}y^2=1$，則 $\log_2 8x+\log_2 \sqrt{2}\,y$ 的最大值為何？
   (1) 1
   (2) $\frac{3}{2}$
   (3) 2
   (4) $\frac{5}{2}$
   (5) $\frac{7}{2}$

4. 在坐標平面上，已知△ABC 內接於圓心為 O，半徑為 r 的圓，若 $\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$ ，試求△ABC 最小角的餘弦值為何？
(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
(4) $\dfrac{1}{2}$
(5) $\dfrac{1}{3}$

5. 設銳角三角形 ABC 的三邊長皆為正整數，若 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 且 $2\,\overline{AB}=\overline{BC}+4$，試問這樣的三角形 ABC 共有幾個？
(1) 0
(2) 1
(3) 2
(4) 3
(5) 4

6. 學校某社團對於在學期中非社員要申請加入該社團，採取由幹部記名投票來決定是否能通過成為新社員，方式如下：
a. 出席表決的幹部人數必須至少為全體幹部人數的四分之三。
b. 出席表決的幹部只能投票同意或投票不同意，不可棄權或不表示意見。
c. 同意票數必須多於不同意票數。
同時符合以上三條件方可獲准加入該社團。今有非社員小華申請加入該社團，而本學期全體幹部共八人，若小華獲准加入該社團的記名投票方式有 n 種，則
(1) $n<1000$
(2) $1000<n<1100$
(3) $1100<n<1200$
(4) $1200<n<1300$
(5) $1300<n<1400$

7. 設 P、Q 為直線 L：$\begin{cases} x-2y-3z=-21 \\ 2x+3y+z=21 \end{cases}$ 上兩點，且 $\overline{PQ}=5\sqrt{3}$。令 O 為原點，若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 的最小值為 m，則 m 最接近的正整數為下列哪一個選項？
(1) 21
(2) 22
(3) 23
(4) 24
(5) 25

二、多選題（占 30 分）

說明：第 8 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

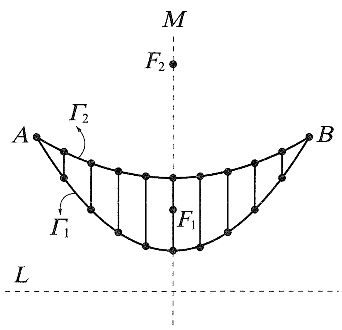
8. 摸彩箱中有大小、材質相同的彩球 20 顆，其中有 3 顆紅球，每顆可兌換 100 元彩金，有 5 顆藍球，每顆可兌換 50 元彩金，剩餘的白球每顆可兌換 10 元彩金。今從箱中一次取出 2 顆彩球，若每一顆彩球被取出的機率均等，試選出下列正確的兌換彩金的機率。
(1)兌換 200 元彩金的機率為 $\dfrac{C_2^3}{C_2^{20}}$
(2)兌換 150 元彩金的機率為 $\dfrac{C_1^3C_1^5}{C_2^{20}}$
(3)兌換 100 元彩金的機率為 $\dfrac{P_2^5}{P_2^{20}}$
(4)兌換 60 元彩金的機率為 $\dfrac{P_1^5P_1^{12}}{P_2^{20}}$
(5)兌換 30 元彩金的機率為 $\dfrac{C_2^{12}}{C_2^{20}}$

9. 有 30 對數據 $(x_i\,,y_i)$，$i=1$，2，……，30，其算術平均數 $\mu_X=4$，$\mu_Y=5$，x 與 y 的相關係數 $r=0.8$，且 y 對 x 的迴歸直線過點 (3 , 3)，請選出正確敘述的選項。
(1) y 對 x 的迴歸直線過點 (1 , 5)
(2) y 對 x 的迴歸直線為 $y=2x+3$
(3) y 的標準差小於 x 的標準差
(4)將數據經線性調整所得之數據為 $(2x_i+3\,,4-5y_i)$，$i=1$，2，……，30，則其相關係數仍為 0.8
(5)若將數據標準化所得之標準化數據為 $(x_i'\,,y_i')$，$i=1$，2，……，30，則 y' 對 x' 迴歸直線的斜率 $m'=0.8$

10. 已知一個三角形的三邊所在直線分別為 L_1：$3x+4y=91$、L_2：$4x-3y+62=0$ 以及 L_3：$y=10$。若點 $P(a\,,b)$ 落在三角形的內部或是邊上，請從下列各選項中的點，選出必在此三角形的內部或邊上者。
(1) $(a+1\,,b)$
(2) $(a\,,b-1)$
(3) $(a+1\,,b-1)$
(4) $(1\,,b)$
(5) $(a\,,10)$

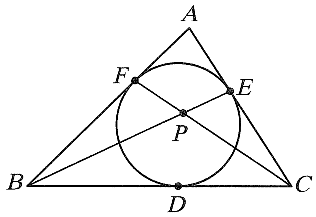
11. 已知 $f(x)$ 為實係數三次多項式，且 $f(2-i)=2$，$f(0)=-3$，$f(1)=2$，請選出正確敘述的選項。
(1) $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 2
(2) $f(x)$ 除以 x^2-4x+5 的餘式為 2
(3) $f(x)$ 除以 x^2-x 的餘式為 $5x-3$
(4)方程式 $f(x)=0$ 有負實根
(5)方程式 $f(x)=0$ 有有理根

12. 某建築物外牆面有如右圖的設計圖樣，此圖由具有共同準線 L 與共同對稱軸 M 的兩拋物線 Γ_1、Γ_2 及 9 根鐵條所構成，且所有鐵條所在直線與 L 垂直。點 A、B 為 Γ_1、Γ_2 的交點，且 A 點與最左一根鐵條所在直線、B 點與最右一根鐵條所在直線，以及相鄰的兩鐵條所在直線均等距離。已知 Γ_1、Γ_2 焦點依序為 F_1、F_2。若 $\overline{AB}=300$ 公分，且 B 點到準線 L 的距離為 170 公分，請選出正確敘述的選項。



(1) $\overline{F_1F_2}=170$ 公分
(2) Γ_1 的焦距為 55 公分
(3) Γ_2 的焦距為 125 公分
(4)這 9 根平行鐵條中，最長的是 80 公分
(5)這 9 根平行鐵條中，最短的是 31.2 公分

13. 已知△ABC 三邊長分別為 $\overline{AB}=6$、$\overline{BC}=7$、$\overline{AC}=5$，其內切圓與 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的切點分別為 D、E、F，連接 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CF}$ 交於點 P，若 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$，請選出正確敘述的選項。



(1) $\overline{AE}=\overline{AF}=2$
(2) $(x,y)=\left(\dfrac{5}{11},\dfrac{6}{11}\right)$
(3) t，s 滿足關係式 $t+\dfrac{5}{2}s=1$
(4) $(t,s)=\left(\dfrac{8}{13},\dfrac{2}{13}\right)$
(5) A、P、D 三點共線

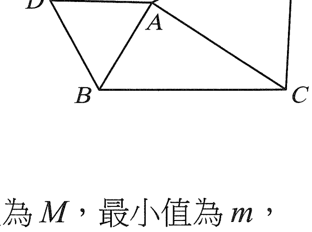
第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(14－34)。 2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 A_1，A_2，A_3，……皆為二階方陣，已知 $A_1=\begin{bmatrix}1&4\\3&7\end{bmatrix}$ 且 $A_k=2A_{k-1}-\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}$，$k\geq 2$，$k$ 為正整數，試求 A_4 的行列式值為 ⑭⑮⑯ 。

B. 有一闖關遊戲，每位參賽者要依序過三關，每通過一關者才能繼續參加下一關挑戰，已知第一關、第二關、第三關被淘汰的機率分別是 $\dfrac{1}{3}$、$\dfrac{3}{5}$、$\dfrac{9}{10}$，且每一關過關與否不互相影響。若已知大雄被淘汰了，則他是在第二關被淘汰的條件機率為 $\dfrac{⑰⑱}{⑲⑳}$ 。(化為最簡分數)

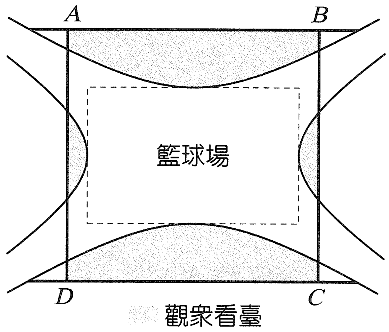
C. 已知△ABC 三邊長分別為 $\overline{AB}=3$、$\overline{BC}=7$、$\overline{AC}=5$，以 $\overline{AB}$ 為一邊向外做正三角形 ABD，再以 $\overline{AC}$ 為一邊向外做正三角形 ACE，連 $\overline{DE}$，示意圖如右。試求四邊形 $DECB$ 的面積為 ㉑㉒$\sqrt{㉓}$ 。(化為最簡根式)



D. 已知 $P(a,b)$ 為圓 C：$(x-3)^2+(y+4)^2=4$ 上一點，若 $3a-4b$ 之最大值為 M，最小值為 m，則 $M+m=$ ㉔㉕ 。

E. 考慮 x，y，z 的方程組 Γ：$\begin{cases}\log_2 x-\log_3 y+\log_5 z=1\\ 2\log_2 x+\log_3 y-\log_5 z=2\\ 2\log_2 x+3\log_3 y+a\log_5 z=2\end{cases}$，其中 a 為實數且 $a\neq-3$，若 (x_0, y_0, z_0) 為此方程組的解，則 $2x_0+3y_0+4z_0=$ ___㉖㉗___ 。

F. 國際籃球總會在 1984 年正式確認標準籃球場地板的規格為長 28 公尺，寬 15 公尺，若今猿熊建設想在捷運站附近買地蓋一座標準籃球場，並且規劃觀眾看臺為兩共軛雙曲線與其正焦弦所在直線圍出的部分範圍，如右圖中所示的陰影區域，而矩形 $ABCD$ 為設計師規劃的整個建築用地，其各邊所在的直線恰好平行於籃球場的各邊，則矩形 $ABCD$ 的面積為 ___㉘㉙㉚㉛___ 平方公尺。(註：正焦弦所在的直線是指過焦點且與雙曲線貫軸垂直的直線)



G. 已知數列〈a_n〉：1，3，4，9，10，12，13，27，28，30，31，36，37，39，40，81，……。〈a_n〉的每一項是由一個 3 的非負整數次方或由幾個相異 3 的非負整數次方之和所組成，並且數列按照由小到大排列。即數列的前幾項是

$3^0(=1)$，
$3^1(=3)$，
$3^0+3^1(=4)$，
$3^2(=9)$，
$3^0+3^2(=10)$，
$3^1+3^2(=12)$，
$3^0+3^1+3^2(=13)$，
$3^3(=27)$，
$3^0+3^3(=28)$，
$3^1+3^3(=30)$，
$3^0+3^1+3^3(=31)$，
$3^2+3^3(=36)$，
$3^0+3^2+3^3(=37)$，
$3^1+3^2+3^3(=39)$，
$3^0+3^1+3^2+3^3(=40)$，
$3^4(=81)$，
……

試求此數列的第 100 項 $a_{100}=$ ___㉜㉝㉞___ 。

參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

3. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S_n=\dfrac{n[2a+(n-1)d]}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\ (r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

4. $P^n_m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$，$C^n_m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

5. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-n\mu_X^2\right)}$

6. 二維數據 (X, Y)：(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，……，(x_n, y_n)，

   相關係數 $r_{XY}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線(最適合直線)方程式為 $y-\mu_Y=r_{XY}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

7. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R 為$\triangle ABC$ 外接圓半徑)

8. $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

9. 向量 $\overrightarrow{u}$ 與向量 $\overrightarrow{v}$ 的內積為 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos\theta$，其中 θ 為 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角

10. $\overrightarrow{u}=(a_1, b_1, c_1)$ 與 $\overrightarrow{v}=(a_2, b_2, c_2)$ 的外積為 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}=\left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$

11. 雙曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的共軛雙曲線方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$

12. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$

13. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}7\approx 0.8451$

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(3)	(2)	(4)	(1)	(5)	(4)	(3)	(1)(2)(3)	(5)
題號	10.	11.	12.	13.					
答案	(4)(5)	(1)(2)(3)	(3)(4)	(1)(3)(5)					

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

難易度：易

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：絕對值不等式的解法

解析：$x>|x-1| \Rightarrow x^2>(x-1)^2$

$\Rightarrow x^2>x^2-2x+1 \Rightarrow 2x>1 \Rightarrow x>\dfrac{1}{2}$

故選(3)。

2. (2)

難易度：易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式的變形(綜合除法)與小數求值

解析：$\therefore f(x)=(x+2)^3+(x+2)^2+7(x+2)+2$

$\Rightarrow f(-1.99)=(0.01)^3+(0.01)^2+7(0.01)+2$

$=2.070101$

$\therefore$小數點以下第二位數字為 7

故選(2)。

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & +7 & +23 & +28 & -2 \\
 & -2 & -10 & -26 & \\
\hline
1 & +5 & +13 & +2 & \\
 & -2 & -6 & & \\
\hline
1 & +3 & +7 & & \\
 & -2 & & & \\
\hline
1 & +1 & & &
\end{array}
$$

3. (4)

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：熟悉對數的性質，會使用算幾不等式

解析：由算幾不等式知，

$1=4x^2+\dfrac{1}{4}y^2 \geq 2\sqrt{(4x^2)\left(\dfrac{1}{4}y^2\right)}=2xy \Rightarrow xy \leq \dfrac{1}{2}$

$\therefore \log_2 8x+\log_2 \sqrt{2}y=\log_2 8\sqrt{2}xy \leq \log_2\left(2^{\frac{7}{2}}\times\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$

故選(4)。

4. (1)

難易度：中

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量長度與內積的應用

解析：由 $\overrightarrow{OA}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，作圖如右，可知最小角為$\angle B$，

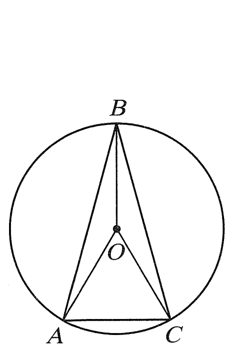
且$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}|=|-\sqrt{3}\,\overrightarrow{OB}| \Rightarrow |\overrightarrow{OA}|^2+2\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2=3|\overrightarrow{OB}|^2$

$\Rightarrow 2r^2+2r^2\cos\angle AOC=3r^2 \Rightarrow \cos\angle AOC=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \angle AOC=60^\circ \Rightarrow \angle B=30^\circ$

故$\triangle ABC$ 最小角的餘弦值$=\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

故選(1)。



5. (5)

難易度：中

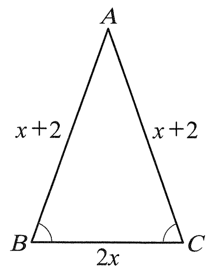
出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：三角邊角關係、餘弦定理

解析：設 $\overline{AB}=\overline{AC}=x+2$，$\overline{BC}=2x$

邊長為正且三邊滿足三角不等式

$$\Rightarrow\begin{cases}x+2>0\\ 2x>0\\ (x+2)+(x+2)>2x\\ (x+2)+2x>x+2\end{cases}\Rightarrow x>0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$



又∵ $\angle B=\angle C$ 必為銳角(否則三角形內角和大於 180°)

∴只要看 $\angle A<90^\circ$ 的條件即可：

$(x+2)^2+(x+2)^2>(2x)^2 \Rightarrow 2-2\sqrt{2}<x<2+2\sqrt{2}$ ⋯⋯⋯⋯⋯②

由①、②得：$0<x<2+2\sqrt{2}\approx 4.8$

∵$x\in N$ ∴$x=1$，2，3，4

$\Rightarrow$ 三角形 ABC 三邊長 $(3,3,2)\vee(4,4,4)\vee(5,5,6)\vee(6,6,8)$ 共 4 個

故選(5)。

6. (4)

難易度：中

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：題目的閱讀、分類討論、完全相異物的組合

解析：出席表決的幹部人數必須至少為 $8\times\frac{3}{4}=6$，所以

出席表決幹部人數	6	7	8
記名過半同意票數	4，5，6	4，5，6，7	5，6，7，8
記名投票方式的總數	$C_6^8(C_4^6+C_5^6+C_6^6)$	$C_7^8(C_4^7+C_5^7+C_6^7+C_7^7)$	$C_8^8(C_5^8+C_6^8+C_7^8+C_8^8)$
小計	616	512	93

故小華獲准加入該社團的記名投票方式有 $616+512+93=1221$ 種

故選(4)。

7. (3)

難易度：難

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：由兩面式求出直線的參數式，藉由參數式的假設列出距離條件，結合空間向量形成二次函數求出最小值

解析：由題意求出直線 L：$\begin{cases}x=-3+t\\ y=9-t\\ z=t\end{cases}$，$t\in R$

設 $P(-3+t,9-t,t)$，$Q(-3+s,9-s,s)$

$\Rightarrow \overline{PQ}^2=3(t-s)^2=75\Rightarrow t-s=\pm 5$，取 $t=s+5$

又 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(-3+t)(-3+s)+(9-t)(9-s)+ts=3s^2-9s+30=3\left(s-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{93}{4}$

故得最小值為 $\frac{93}{4}=23.25$

故選(3)。

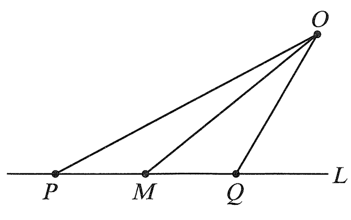
〈另解〉

取 $\overline{PQ}$ 中點 M

則 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP})\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MQ})$

$=|\overrightarrow{OM}|^2+(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ})\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$

$=\overline{OM}^2+0-\frac{1}{4}\overline{PQ}^2\geq d^2(O,L)-\frac{1}{4}\overline{PQ}^2$



又取 L 上一點 $A(-3,9,0)$，一方向向量 $\overrightarrow{v}=(1,-1,1)$

則 $\overrightarrow{AO}$ 和 $\overrightarrow{v}$ 所成平行四邊形的高 $=\dfrac{\sqrt{|\overrightarrow{AO}|^2|\overrightarrow{v}|^2-(\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{v})^2}}{|\overrightarrow{v}|}=\dfrac{\sqrt{126}}{\sqrt{3}}=\sqrt{42}$

即 $d(O,L)=\sqrt{42}$

則 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\geq d^2(O,L)-\dfrac{1}{4}\overline{PQ}^2=42-\dfrac{1}{4}\times 75=\dfrac{93}{4}=23.25$

故最小值為 23.25

故選(3)。

二、多選題

8. (1)(2)(3)

難易度：易

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：認識排列、組合的符號與古典機率的計算

解析：本試驗的樣本數為 C_2^{20}

(1) ◯：∵兌換 200 元表示取出 2 顆紅球，其樣本數 $=C_2^3$

∴機率為 $\dfrac{C_2^3}{C_2^{20}}$

(2) ◯：∵兌換 150 元表示取出 1 顆紅球與 1 顆藍球，其樣本數 $=C_1^3C_1^5$

∴機率為 $\dfrac{C_1^3C_1^5}{C_2^{20}}$

(3) ◯：∵兌換 100 元表示取出 2 顆藍球，其樣本數 $=C_2^5$

∴機率為 $\dfrac{C_2^5}{C_2^{20}}=\dfrac{P_2^5}{P_2^{20}}$

(4) ╳：∵兌換 60 元表示取出 1 顆藍球與 1 顆白球，其樣本數 $=C_1^5C_1^{12}$

∴機率為 $\dfrac{C_1^5C_1^{12}}{C_2^{20}}$

(5) ╳：∵兌換 30 元表示取出 3 顆白球，在本試驗中屬不可能事件

∴機率為 0

故選(1)(2)(3)。

9. (5)

難易度：易

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：能知道相關係數與迴歸直線的定義，以及線性調整對於標準差的影響

解析：(1) ╳ (2) ╳：因為迴歸直線必過 (μ_X,μ_Y)，又過點 $(3,3)$，

可求出迴歸直線之斜率 $m=\dfrac{5-3}{4-3}=2$

∴迴歸直線為 $y=2x-3$ 且 $(1,5)$ 帶入此方程式不符合

因此迴歸直線不過點 $(1,5)$

(3) ╳：$\because m=r\times\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\Rightarrow 2=0.8\times\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\Rightarrow\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=\dfrac{5}{2}\Rightarrow\sigma_Y>\sigma_X$

(4) ╳：$\because 2\times(-5)<0\quad\therefore r'=-r=-0.8$

(5) ◯：$\because x_i'=\dfrac{x_i-\mu_X}{\sigma_X}$，$y_i'=\dfrac{y_i-\mu_Y}{\sigma_Y}$，且 $\dfrac{1}{\sigma_X}\times\dfrac{1}{\sigma_Y}>0\Rightarrow r'=r$

而此時 $\sigma_X'=\sigma_Y'=1$

$\therefore m'=r'\times\dfrac{\sigma_Y'}{\sigma_X'}=r=0.8$

故選(5)。

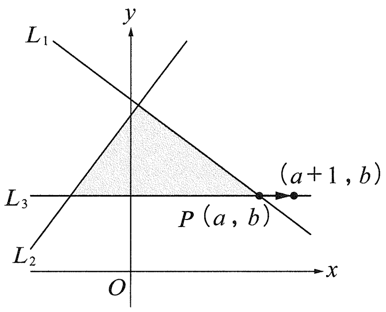
10. (4)(5)

難易度：中

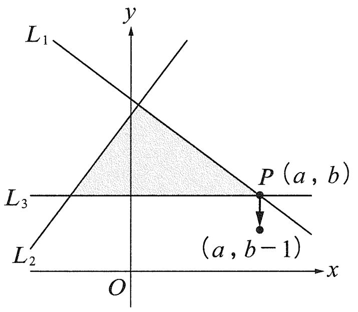
出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：平面坐標上平移、投影概念的應用

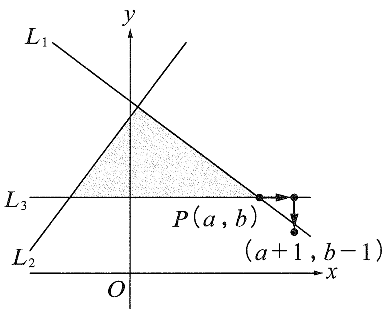
解析：(1) ╳：



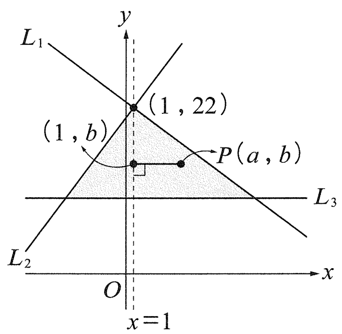
(2) ╳：



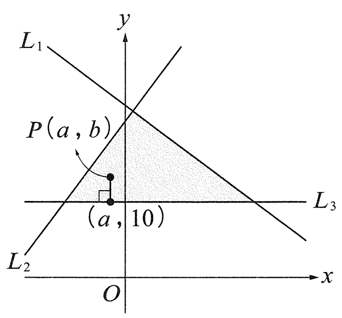
(3) ╳：



(4) ○：



(5) ○：



故選(4)(5)。

11. (1)(2)(3)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：餘式定理、虛根共軛成對定理、牛頓定理的應用

解析：$\because f(2-i)=2$

$\therefore 2-i$ 為實係數方程式 $f(x)-2=0$ 之根

由虛根共軛成對定理知：$2+i$ 亦為根

$\therefore$可令 $f(x)-2=(x-(2-i))(x-(2+i))(ax+b)=(x^2-4x+5)(ax+b)$

$\Rightarrow f(x)=(x^2-4x+5)(ax+b)+2$

又$\because f(0)=-3\Rightarrow 5b+2=-3\Rightarrow b=-1$

$f(1)=2\Rightarrow 2(a+b)+2=2\Rightarrow a=1$

$\therefore f(x)=(x^2-4x+5)(x-1)+2=x^3-5x^2+9x-3$

(1)○：由餘式定理知餘式為 $f(1)=2$

(2)○：$f(x)=(x^2-4x+5)(x-1)+2$ 除以 x^2-4x+5 的餘式為 2

(3)○：$f(x)=x(x-1)q(x)+(hx+k)$

$f(0)=k=-3$，$f(1)=h+k=2\Rightarrow h=5$　$\therefore$餘式為 $5x-3$

(4)╳：$f(x)=x^3-5x^2+9x-3=x(\underbrace{x^2-5x+9}_{\text{恆正}})-3$

$\Rightarrow f(x)<0$ 當 $x<0$　$\therefore f(x)=0$ 沒有負實根

(5)╳：由牛頓定理知可能的有理根為 ±1，±3，但 $f(\pm1)\neq0$，$f(\pm3)\neq0$　$\therefore f(x)=0$ 沒有有理根

故選(1)(2)(3)。

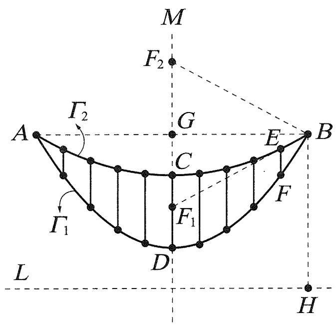
12. (3)(4)

難易度：中

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：拋物線的定義與方程式

解析：作 $\overline{BH}\perp L$，連 $\overline{BA}$，$\overline{BF_1}$，$\overline{BF_2}$，設 $\overline{BA}$，M 交於 G



由拋物線的定義知 $\overline{BF_1}=\overline{BF_2}=\overline{BH}=170$ 公分，

又 $\overline{BG}=\dfrac{1}{2}\overline{BA}=150$ 公分且 $\overline{BG}\perp\overline{F_1F_2}$

$\Rightarrow\overline{F_1F_2}=2\overline{F_2G}=2\sqrt{170^2-150^2}=160$ 公分

設 Γ_1，Γ_2 的焦距 $\overline{F_1D}$，$\overline{F_2C}$ 分別為 a 公分及 b 公分

$d(G,L)=2a+80=2b-80=170\Rightarrow a=45$，$b=125$

最長的鐵條 $\overline{CD}=d(C,L)-d(D,L)=\overline{F_2C}-\overline{F_1D}=125-45=80$ 公分

故可設 D 為原點，並設 $\begin{cases}\Gamma_1: x^2=4\times45y\\ \Gamma_2: x^2=4\times125(y-80)\end{cases}$

E、F 的 x 坐標為 $\dfrac{4}{5}\times150=120$ 分別代入 Γ_1，Γ_2，分別解得 $y=80$，108.8

得最短的鐵條 $\overline{EF}=108.8-80=28.8$ 公分

故選(3)(4)。

13. (1)(3)(5)

難易度：難

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：線性組合、共線性質與分點公式的應用

解析：(1)○：因為 $\overline{AF}+\overline{BF}=6$，$\overline{BD}+\overline{CD}=7$，$\overline{AE}+\overline{CE}=5$

且由切線段等長知 $\overline{AF}=\overline{AE}$，$\overline{BD}=\overline{BF}$，$\overline{CE}=\overline{CD}$

解得 $\overline{AF}=\overline{AE}=2$，$\overline{BD}=\overline{BF}=4$，$\overline{CE}=\overline{CD}=3$，故(1)正確

(2)╳：由(1)，$\overline{BD}=4$，$\overline{CD}=3$ 得到 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{7}\overrightarrow{AC}$，故不正確

(3)○：由(1)，$\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}=t\overrightarrow{AB}+\dfrac{5s}{2}\overrightarrow{AE}$

又 B，P，E 三點共線，故 $t+\dfrac{5}{2}s=1$

(4)╳：同(3)方法可得 $\overrightarrow{AP}=3t\overrightarrow{AF}+s\overrightarrow{AC}$，$3t+s=1$，解得 $(t,s)=\left(\dfrac{3}{13},\dfrac{4}{13}\right)$

(5)○：由(2)、(4)得到 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{7}{13}\overrightarrow{AD}$，故 A，P，D 三點共線

故選(1)(3)(5)。

第貳部分：選填題

A. -19

難易度：易

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣的基本運算

解析：$A_2=2A_1-\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&8\\6&14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\4&9\end{bmatrix}$

$A_3=2A_2-\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&8\\8&18\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\6&13\end{bmatrix}$

$A_4=2A_3-\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&8\\12&26\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4\\10&21\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(A_4)=21-40=-19$。

B. $\dfrac{30}{73}$

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：知道獨立事件的定義，以及能夠使用貝氏定理

解析：P(在第二關被淘汰 | 被淘汰)

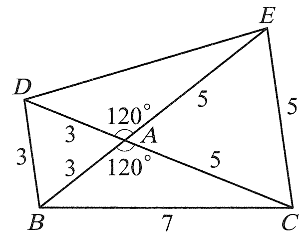
$$=\frac{P(\text{在第二關被淘汰}\cap\text{被淘汰})}{P(\text{被淘汰})}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{9}{10}}=\frac{30}{73}\text{。}$$

C. $16\sqrt{3}$

難易度：中

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：餘弦定理與三角形面積公式的運用



解析：$\cos\angle BAC=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\angle BAC=120^\circ$

$\angle DAE=360^\circ-60^\circ-60^\circ-120^\circ=120^\circ$

$\triangle ABC\cong\triangle ADE$

四邊形面積$=2\times\triangle ABC$ 面積$+\triangle ABD$ 面積$+\triangle ACE$ 面積

$=2\times\dfrac{1}{2}\times3\times5\times\sin120^\circ+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times3^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times5^2$

$=\dfrac{15}{2}\sqrt{3}+\dfrac{9}{4}\sqrt{3}+\dfrac{25}{4}\sqrt{3}$

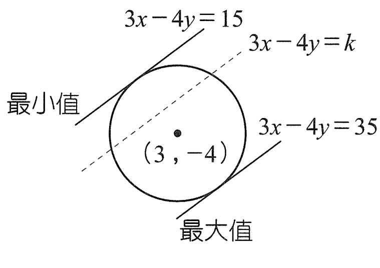
$=16\sqrt{3}$。

D. 50

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：求已知斜率之圓的切線



解析：本題可視為直線 L：$3x-4y=k$ 為圓 C 的切線，求 k 之值

圓 C：$(x-3)^2+(y+4)^2=4$，圓心 $O(3,-4)$，半徑 2

$\therefore d(O,L)=2\Rightarrow\dfrac{|3\times3-4(-4)-k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$

$\Rightarrow|9+16-k|=10\Rightarrow k=15\vee35$

$\therefore m=15$，$M=35$，$35+15=50$。

〈另解〉

由柯西不等式

$[(x-3)^2+(y+4)^2][3^2+(-4)^2]\geq[3(x-3)+(-4)(y+4)]^2$

$\Rightarrow4\times25\geq(3x-4y-25)^2\Rightarrow10\geq3x-4y-25\geq-10$

$\Rightarrow35\geq3x-4y\geq15$

故 $M+m=50$。

E. 11

難易度：中

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：三元一次聯立方程式的解法、對數的基本定義

解析：令 $A=\log_2 x$，$B=\log_3 y$，$C=\log_5 z$

$$\begin{cases} A-B+C=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 2A+B-C=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ 2A+3B+aC=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①＋②$\Rightarrow 3A=3 \Rightarrow A=1 \Rightarrow \log_2 x=1 \Rightarrow x=2$

代回①得：$-B+C=0$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯④

③－②$\Rightarrow 2B+(a+1)C=0$ ⋯⋯⋯⋯⋯⑤

若 $\dfrac{-1}{2} \neq \dfrac{1}{a+1}$ ($\Leftrightarrow a \neq -3$) 時，恰有一解：

④×2＋⑤$\Rightarrow (a+3)C=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow \log_5 z=0 \Rightarrow z=1$

代回④$\Rightarrow B=0 \Rightarrow \log_3 y=0 \Rightarrow y=1$

$\therefore 2x_0+3y_0+4z_0=2\times2+3\times1+4\times1$

$=11$。

F. 1009

難易度：易

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：共軛雙曲線的性質

解析：規劃用地為邊長 $2c$ 的正方形

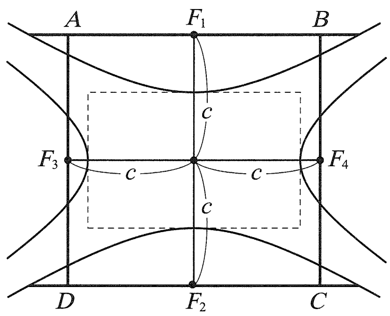
其面積$=(2c)^2=4c^2=4(a^2+b^2)$

$=4\left(\left(\dfrac{28}{2}\right)^2+\left(\dfrac{15}{2}\right)^2\right)$

$=4(14^2+7.5^2)$

$=4(252.25)$

$=1009$。



G. 981

難易度：難

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：觀察數列的規律

解析：$\because 3^k$ 是第 2^k 項，$k=0$，1，2，3，4，5，⋯⋯

$\therefore$ 第 100 項在 3^6 (第 64 項)和 3^7 (第 128 項)之間

其中每一項皆有 3^6

又不含有 3^5 的有 $2^5-1=31$ 項且 $64+31=95$，即第 95 項是 $3^0+3^1+3^2+3^3+3^4+3^6$

$\therefore$ 第 100 項是含有 3^5 開始的第 5 項$=3^2+3^5+3^6=981$。

(事實上，第 96 項是 $3^5+3^6=972$

第 97 項是 $3^0+3^5+3^6=973$

第 98 項是 $3^1+3^5+3^6=975$

第 99 項是 $3^0+3^1+3^5+3^6=976$)