107 學年度全國高級中學
學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～三冊全

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 5 題，選填題第 A 至 J 題共 10 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記，請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利

第壹部分：選擇題（占 50 分）

一、單選題（占 25 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 若數列 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，且 15 項的數列 a_1+1，a_2+4，a_3+9，……，a_k+k^2，……，$a_{15}+225$ 其總和為 1495，則 a_1，a_2，a_3，……，a_k，……，a_{15} 的中位數為何？
   (1) 10
   (2) 13
   (3) 15
   (4) 17
   (5) 21

2. 滿足絕對值不等式 $||x|-|x-6|| \leq 2$ 的整數解 x 共有幾個？
   (1) 1 個
   (2) 2 個
   (3) 3 個
   (4) 4 個
   (5) 5 個

3. 坐標平面上兩圖形 Γ_1、Γ_2 的方程式分別為 Γ_1：$x^2+y^2-4x+2=0$、Γ_2：$(x+y)(x-y)=0$，則 Γ_1 與 Γ_2 共有幾個交點？
   (1) 1 個
   (2) 2 個
   (3) 3 個
   (4) 4 個
   (5) 0 個

4. 小夫與胖虎各自玩堆球遊戲，已知小夫第一次堆 4 個球，之後每次所堆的球數為前一次所堆球數的 2 倍再多 1 個球。而胖虎第一次堆 1 個球，之後每次所堆球數為前一次所堆球數的 3 倍。試問當他們兩人各自堆到第 n 次時，胖虎此次所堆球數超過小夫此次所堆球數的 2 倍，則 n 的最小值為何？
(1) 5
(2) 6
(3) 7
(4) 8
(5) 9

5. 天王星高中每天有 7 節課(上午 4 節，下午 3 節)且每一位教師的排課原則需同時滿足以下兩點要求：
(i) 不連續排 3 節課
(ii) 第 4 節與第 5 節不能同時排課
若此校亮亮老師每天的課可能有 3 到 5 節課，則滿足以上的排課原則，亮亮老師一天的課表可能有幾種排法？
(註：不考慮是哪一班的課，例如：亮亮老師當天若有 4 節課，則其中一種可能的課程安排為 1256 節有課，其中一種不可能的課程安排為 1245 節有課)
(1) 36 種
(2) 45 種
(3) 46 種
(4) 54 種
(5) 57 種

二、多選題（占 25 分）

說明：第 6 題至第 10 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 當 $a<b$ 時，有四個數 $x=\dfrac{2a+3b}{5}$，$y=\dfrac{\sqrt{2}a+\sqrt{3}b}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$，$z=\dfrac{2^2a+2^3b}{2^2+2^3}$，$t=\dfrac{a\log_{10}2+b\log_{10}3}{\log_{10}2+\log_{10}3}$。

   請選出正確的選項。

   (1) $x>y$
   (2) $x>z$
   (3) $y>z$
   (4) $z>t$
   (5) $y>t$

7. 設 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ 為實係數四次多項式函數，且 $f(1)=-3$，$f(2)=1$，$f(4)=-15$。
   請選出正確的選項。

   (1)方程式 $f(x)=0$ 有一個大於 4 的實根
   (2)方程式 $f(x)=0$ 有四個相異實根
   (3) $f(x)$ 除以 $x(x-1)$ 的餘式為 $4x-7$
   (4) $f(x)$ 除以 $x(x-1)(x-2)$ 的餘式為 $4x^2+8x+1$
   (5) $f(x)$ 除以 $x(x-1)(x-2)(x-4)$ 的餘式為 $-2x^3+10x^2-12x+1$

8. 設 a 與 b 皆為正實數，關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $(a+2b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)\ge 15$

(2) $\left(a+\frac{4}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\ge 20$

(3) $\frac{2ab}{a+b}\ge\sqrt{ab}$

(4) $\frac{3^a+3^b}{2}\ge 3^{\frac{a+b}{2}}$

(5) $\log_3\frac{a+b}{2}\ge\frac{\log_3 a+\log_3 b}{2}$

9. 根據統計，HBL 球星浩浩近五場上場時間 X(單位：分鐘)與得分 Y(單位：分)如右表：

上場時間(X)	32	30	36	40	27
得分(Y)	25	18	26	a	20

其中第四場的得分因汙損看不清楚，但已知此五場比賽 Y 對 X 的迴歸直線為 $y=\frac{12}{13}x-\frac{84}{13}$。請選出正確的選項。

(1)這五場的平均上場時間為 33 分鐘

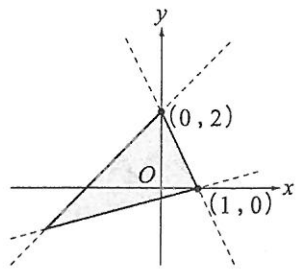
(2)這五場的平均得分數為 25 分

(3)第四場的得分 $a=36$

(4)這五場上場時間的標準差小於 4

(5)上場時間與得分數的相關係數小於 $\frac{12}{13}$

10. 坐標平面上，若二元一次聯立不等式 $\begin{cases} 2x+y-2\le 0 \\ x-y+2\ge 0 \\ ax+by+c\le 0 \end{cases}$ 的可行解區域為三角形區域(包含三角形內部及邊界)，如右圖，且目標函數 $px-y$ 在點 $(0,2)$ 有最小值，請選出正確的選項。



(1) $a>0$
(2) $b>0$
(3) $c>0$
(4) $a+c=0$
(5) $p\ge 1$ 或 $p\le -2$

第貳部分：選填題（占 50 分）

說明：1.第 A 至 J 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(11－34)。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 坐標平面上，函數 $y=\log_{10}(x+1)$ 的圖形上有三個點 $(a,3)$、$(1,b)$、$(4,c)$，則 $\log_{10}(a+b+c)$ ＝ ⑪ 。

B. 百貨公司週年慶，推出刮刮樂彩券活動。凡購物滿 1000 元以上者，皆贈送一張彩券，彩券共有三列三行的表格，每張彩券的九個空格共填入 4 個 A、3 個 B 與 2 個 C，其中一種填入情形如右圖所示，然後將無法透視的油彩覆蓋其上。規定只能任意刮兩格來對獎，若刮出的兩格之字母同為 A，則可得一獎。若刮出的兩格之字母同為 B，則可得二獎。若刮出的兩格之字母同為 C，則可得三獎。若刮出的兩格之字母不同，則沒得獎。今帆帆有刮刮樂彩券一張，已知她刮出的兩格之字母皆相同，則帆帆得到一獎的機率為 $\dfrac{⑫}{⑬}$ 。(化為最簡分數)

A	B	C
A	B	A
B	C	A

C. 擲一顆公正骰子兩次，所得的點數依序是 a 與 b，則一元二次方程式 $x^2-2(a-2)x-b^2+10=0$ 有兩個正根的機率為 $\dfrac{⑭}{⑮}$ 。(化為最簡分數)

(註：此公正骰子為正立方體且六個面的點數分別為 1、2、3、4、5、6)

D. 已知圓形時鐘，時間開始為 3 點整時，時針與分針所夾的夾角為 $\frac{\pi}{2}$，當 3 點 n 分時再遇到時針與分針所夾的夾角為 $\frac{\pi}{2}$(其中 $n \neq 0$)，則 $n=$ $\frac{⑯⑰⑱}{⑲⑳}$ 。(化為最簡分數)

E. 已知 $t>0$ 且三個向量分別為 $\overrightarrow{a}=(1,t)$、$\overrightarrow{b}=(4,2)$、$\overrightarrow{c}=(4,4t)$，若三個向量的長度分別為 $|\overrightarrow{a}|$、$|\overrightarrow{b}|$、$|\overrightarrow{c}|$，且依序成一等比數列，則 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}$ 所張成的平行四邊形面積為 ㉑㉒ 。

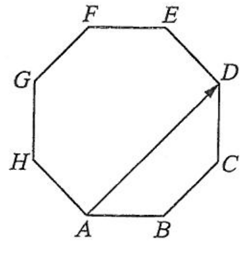
F. 已知二次方程式 $x^2+2(\sin\theta+\cos\theta)x+1=0$ 有一根為 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，則 $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=$ ㉓ 。

G. 設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 為 x 的多項式，若 $g(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為 5，且 $f(x)=(x+1)\cdot g(x)+2$，則 $(f(x))^2$ 除以 $(x+1)^2$ 的餘式為 ㉔㉕$x+$㉖㉗ 。

H. 某自行車公司共有甲、乙、丙三座工廠，設甲、乙、丙廠生產量分別占全部的 40 %、35 %、25 %，且甲、乙、丙廠生產的瑕疵品分別有 5 %、10 %、x %，今在某店家購買此公司所生產的一臺自行車，已知購買到的自行車是瑕疵品，則是甲廠所生產的機率為 $\frac{8}{25}$，試求 $x=$ ㉘ 。

I. $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=5$ 且 $\angle A$ 的內角平分線段長為 $\frac{7}{2}$，則 $\triangle ABC$ 之面積為 $\frac{㉙㉚}{㉛}$ 。(化為最簡分數)

J. 正八邊形 $ABCDEFGH$ 如右圖，若 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AH}$，則 $x+y$ 之值為 ㉜$+$㉝$\sqrt{㉞}$ 。(化為最簡根式)



參考公式及可能用到的數值

1. 以 α，β 為兩根的一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根與係數關係為：$\begin{cases}\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}\\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}\end{cases}$

2. 算幾不等式：設 $a>0$，$b>0$，則 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 恆成立。且當 $a=b$ 時，$\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$

3. 級數公式：

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

4. 一維數據 X：x_1，x_2，$\cdots\cdots$，x_n

算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$

標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}\right)-n\mu_X^{\ 2}\right)}$

5. 二維數據 (X,Y)：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，$\cdots\cdots$，(x_n,y_n)，

相關係數 $r_{XY}=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}\cdot\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_Y)^2}}$

迴歸直線(最適合直線)方程式為 $y-\mu_Y=r_{XY}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

6. 三角函數的倍角公式：

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

7. $\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}bc\sin A$

8. 柯西不等式：若 a_1，a_2，b_1，b_2 為任意實數，則 $(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2})(b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2})\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$

9. 參考數值：$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{3}\approx1.732$，$\sqrt{5}\approx2.236$，$\sqrt{6}\approx2.449$，$\pi\approx3.142$

10. 對數值：$\log_{10}2\approx0.3010$，$\log_{10}3\approx0.4771$，$\log_{10}5\approx0.6990$，$\log_{10}7\approx0.8451$

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(4)	(3)	(2)	(3)	(2)	(1)(4)	(1)(2)(5)	(2)(4)(5)	(1)(5)
題號	10.								
答案	(1)(4)								

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：數列的概念與級數的計算

解析：$(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{15})+(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+15^2)=1495$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{15}+\dfrac{15\times16\times31}{6}=1495$

$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{15}=1495-1240=255$

$\Rightarrow \dfrac{15(a_1+a_{15})}{2}=255\Rightarrow \dfrac{a_1+a_{15}}{2}=17$

中位數 $a_8=\dfrac{a_1+a_{15}}{2}=17$

故選(4)。

2. (3)

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：絕對值不等式的討論與幾何運用

解析：可由與 0 和 6 的距離差推得：

① $|x|-|x-6|=2$，則 $x=4$

② $|x|-|x-6|=-2$，則 $x=2$

③ $|x|-|x-6|=1$，則 x 無整數解

④ $|x|-|x-6|=-1$，則 x 無整數解

⑤ $|x|-|x-6|=0$，則 $x=3$

故 $x=2$，3，4，共 3 個

故選(3)。

〈另解〉

分段討論

①若 $x<0$ 時，

$||x|-|x-6||=|-x-(6-x)|=6$ 不合

故無解

②若 $0\le x<6$ 時，

$||x|-|x-6||=|x-(6-x)|\le 2$

$\Rightarrow |2x-6|\le 2\Rightarrow 2\le x\le 4$

整數值為 2，3，4，共 3 個

③ $x\ge 6$ 時，

$||x|-|x-6||=|x-(x-6)|=6$ 不合

故無解

由①、②、③知共 3 個

故選(3)。

3. (2)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：直線與圓的相交關係

解析：配方可得

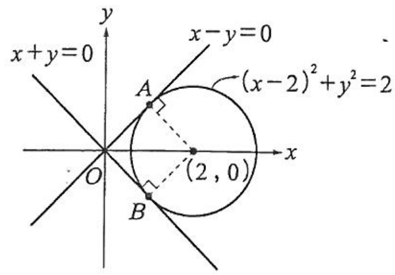
Γ_1：$(x-2)^2+y^2=2$，即圓心為 $(2,0)$，半徑為 $\sqrt{2}$ 的圓

Γ_2：$x+y=0$ 或 $x-y=0$，圖形為相交兩直線

將 Γ_1，Γ_2 畫在直角坐標系可得如右：

交於 A、B 兩點

故選(2)。



4. (3)

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：發現數列的規律性

解析：令〈a_n〉為小夫每次所堆球數的數列

〈b_n〉為胖虎每次所堆球數的數列

$$\begin{cases} a_1=4 \\ a_{n+1}=2a_n+1，n\in N \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1=1 \\ b_{n+1}=3b_n，n\in N \end{cases}$$

〈a_n〉：4，9，19，39，79，159，319

〈b_n〉：1，3，9，27，81，243，729

$\therefore n \geq 7$

故選(3)。

註：$a_n=5\times2^{n-1}-1$，$b_n=3^{n-1}$，$n\in N$

5. (2)

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：直線排列

解析：第一種情況：亮亮老師一天有 3 節課

①當上午有 3 節課且下午沒課時，

可排 1、2、4 節或 1、3、4 節

有 2 種排課方法

②當上午有 2 節課且下午有 1 節課時，

有 $\underbrace{C_2^3}_{\text{不排第4節}}\times C_1^3+C_1^3\times\underbrace{C_1^1}_{\text{排第4節}}\times C_1^2=15$ 種排課方法

③當上午有 1 節課且下午有 2 節課時，

有 $\underbrace{C_1^3}_{\text{不排第4節}}\times C_2^3+\underbrace{C_1^1}_{\text{排第4節}}\times C_2^2=10$ 種排課方法

第二種情況：亮亮老師一天有 4 節課

①當上午有 3 節課且下午有 1 節課時，

有 $\underbrace{2}_{\text{上午排1、2、4節或1、3、4節}}\times C_1^2=4$ 種排課方法

②當上午有 2 節課且下午有 2 節課時，

有 $\underbrace{C_2^3}_{\text{不排第4節}}\times C_2^3+\underbrace{C_1^3}_{\text{排第4節}}\times C_2^2=12$ 種排課方法

第三種情況：亮亮老師一天有 5 節課

所以上午有 3 節課且下午有 2 節課，

有 $2\times C_2^2=2$ 種排課方法

由以上可知共有 45 種排課方法

故選(2)。

二、多選題

6. (1)(4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：基本的整數、無理數、指數與對數的化簡與分點公式的估計應用

解析：$a<b$，利用分點公式可知四數 x，y，z，t 皆在 a，b 之間

不失一般性，假設 $a=0$，$b=1$ 分別代入四數

可得 $x=\dfrac{3}{5}=0.6$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\approx 0.55$，

$z=\dfrac{8}{4+8}\approx 0.67$，$t=\dfrac{\log 3}{\log 2+\log 3}\approx 0.61$

$\therefore z>t>x>y$

故選(1)(4)。

7. (1)(2)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式的餘式定理、插值多項式與勘根定理的應用

解析：$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$

$\Rightarrow f(0)=1$，$f(1)=-3$，$f(2)=1$，$f(4)=-15$

又因為 $f(x)$ 的最高次係數為 1

所以一定找得到 $k>4$ 且 $f(k)>0$

$f(0)\cdot f(1)<0$，$f(1)\cdot f(2)<0$，$f(2)\cdot f(4)<0$，$f(4)\cdot f(k)<0$

由勘根定理可得知 $f(x)=0$ 有四個相異實根

故知在 $(0,1)$，$(1,2)$，$(2,4)$，$(4,\infty)$ 四個區間內各恰有一個實根

令 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-4)+mx(x-1)(x-2)+nx(x-1)+px+1$

$f(1)=-3\Rightarrow p+1=-3\Rightarrow p=-4$

$f(2)=1\Rightarrow 2n-8+1=1\Rightarrow n=4$

$f(4)=-15\Rightarrow 24m+48-16+1=-15\Rightarrow m=-2$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=x(x-1)(x-2)(x-4)-2x(x-1)(x-2)+4x(x-1)-4x+1\\&=x(x-1)\cdot[(x-2)(x-4)-2(x-2)+4]-4x+1\\&=x(x-1)(x-2)\cdot[(x-4)-2]+4x^2-8x+1\\&=x(x-1)(x-2)(x-4)-2x^3+10x^2-12x+1\end{aligned}$$

故選(1)(2)(5)。

8. (2)(4)(5)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：不等式的應用與指對數函數圖形的凹向性

解析：(1)╳：由柯西不等式可得

$$\left[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{2b})^2\right]\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{b}}\right)^2\right]\geq(1+2)^2=9$$

所以大於等於 15 不合

(2)○：由算幾不等式可得

$$\frac{a+\frac{4}{a}}{2}\geq 2\quad\therefore a+\frac{4}{a}\geq 4$$

$$\frac{b+\frac{1}{b}}{2}\geq 1\quad\therefore b+\frac{1}{b}\geq 2$$

故 $\left(a+\dfrac{4}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2\geq 16+4=20$

(3)╳：$\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\dfrac{1}{ab}}$

將左式分子分母同乘 ab 可得 $\dfrac{b+a}{2ab} \geq \sqrt{\dfrac{1}{ab}}$

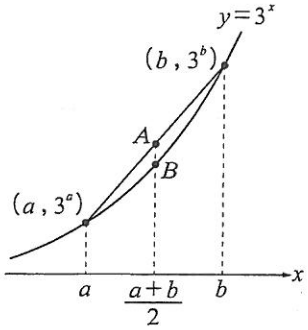
兩邊同取倒數得 $\dfrac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$

(4)○：如圖(一)，$y=3^x$ 圖形凹口向上

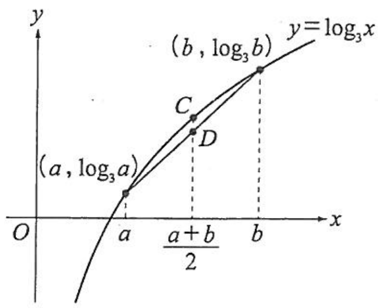
比較 A、B 兩點的 y 坐標可得 $\dfrac{3^a+3^b}{2} \geq 3^{\frac{a+b}{2}}$

(5)○：如圖(二)，$y=\log_3 x$ 圖形凹口向下

比較 C、D 兩點的 y 坐標可得 $\log_3 \dfrac{a+b}{2} \geq \dfrac{\log_3 a+\log_3 b}{2}$



圖(一)



圖(二)

故選(2)(4)(5)。

9. (1)(5)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：相關係數、迴歸直線的定義與關係

解析：(1)(2)：時間 X 的平均數 $\mu_X=\dfrac{32+30+36+40+27}{5}=33$

因為 (μ_X, μ_Y) 在迴線直線上

將 $(33, \mu_Y)$ 代入 $y=\dfrac{12}{13}x-\dfrac{84}{13}$

可得 $\mu_Y=24$

$\therefore$(1)○；(2)╳

(3)╳：$\mu_Y=\dfrac{25+18+26+a+20}{5}=24$

可得 $a=31$

(4)╳：X 的標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{(32-33)^2+(30-33)^2+(36-33)^2+(40-33)^2+(27-33)^2}{5}}$

$=\sqrt{20.8}>4$

(5)○：Y 的標準差 $\sigma_Y=\sqrt{\dfrac{(25-24)^2+(18-24)^2+(26-24)^2+(31-24)^2+(20-24)^2}{5}}$

$=\sqrt{21.2}$

$\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}=\dfrac{\sqrt{20.8}}{\sqrt{21.2}}<1$

迴歸直線斜率為 $\dfrac{12}{13}=r\cdot\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

$\Rightarrow$ 相關係數 $r=\dfrac{12}{13}\times\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}<\dfrac{12}{13}$

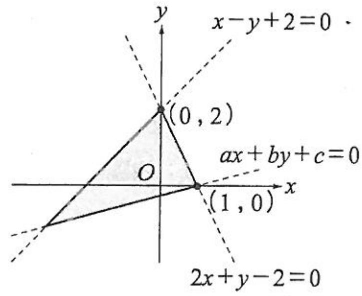
故選(1)(5)。

10. (1)(4)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃中可行解區域與直線關係

解析：由右圖可知



(1)○：若 $a>0$，$ax+by+c\le 0$ 為左半平面

$a<0$，$ax+by+c\le 0$ 為右半平面

故 $a>0$

(2)╳：若 $b>0$，$ax+by+c\le 0$ 為下半平面

$b<0$，$ax+by+c\le 0$ 為上半平面

故 $b<0$

(3)╳：$ax+by+c=0$ 交 y 軸於點 $\left(0,-\dfrac{c}{b}\right)$，且 $-\dfrac{c}{b}<0$

因為 $b<0$，故 $c<0$

(4)○：$ax+by+c=0$ 過點 $(1,0)$，代入可得 $a+c=0$

(5)╳：目標函數 $px-y$ 由一組斜率為 p 的平行線，且往上遞減欲使其在 $(0,2)$ 有最小值

則 p 須滿足 $-2\le p\le 1$

故選(1)(4)。

第貳部分：選填題

A. 3

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數函數的運算

解析：$y=\log_{10}(x+1)$

$(a,3)$ 代入得 $3=\log_{10}(a+1)\Rightarrow a=999$

$(1,b)$ 代入得 $b=\log_{10}(1+1)=\log_{10}2$

$(4,c)$ 代入得 $c=\log_{10}(4+1)=\log_{10}5$

$$\begin{aligned}\therefore \log_{10}(a+b+c)&=\log_{10}(999+\log_{10}2+\log_{10}5)\\&=\log_{10}(999+1)\\&=\log_{10}1000=3\end{aligned}$$ 。

B. $\dfrac{3}{5}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率之運算

解析：刮出相同字母有 $C_2^4+C_2^3+C_2^2=10$ 種方法

獲得一獎(同時刮出 A)有 $C_2^4=6$ 種方法

故機率為 $\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$ 。

C. $\dfrac{2}{9}$

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：二次方程式的根與係數關係、機率的運用

解析：$x^2-2(a-2)x-b^2+10=0$

利用根與係數法得，有兩個正根的條件為

$$\begin{cases}2(a-2)>0\\-b^2+10>0\\4(a-2)^2+4b^2-40\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>2\\b^2<10\\(a-2)^2+b^2\ge 10\end{cases}$$

$\therefore$數對 $(a,b)=(3,3)$，$(4,3)$，$(5,1)$，$(5,2)$，$(5,3)$，$(6,1)$，$(6,2)$，$(6,3)$

故所求機率為 $\dfrac{8}{6\times 6}=\dfrac{2}{9}$ 。

D. $\dfrac{360}{11}$

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：弧度的運算

解析：當分針走一分鐘時，時針移動的弧度為 $\dfrac{2\pi}{12}\cdot\dfrac{1}{60}=\dfrac{\pi}{360}$

當分針走一分鐘時，分針移動的弧度為 $\dfrac{2\pi}{60}=\dfrac{\pi}{30}$

$\therefore$3 點 n 分時的夾角為

$n\cdot\dfrac{\pi}{30}-\dfrac{2\pi}{12}\cdot 3-n\cdot\dfrac{\pi}{360}=\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{11}{360}\cdot n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

$\Rightarrow n=\dfrac{360}{11}$。

E. 18

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：平面向量與面積的運算

解析：$t>0$，$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{1+t^2}$，$|\overrightarrow{b}|=2\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{c}|=4\sqrt{1+t^2}$

$\because |\overrightarrow{a}|$，$|\overrightarrow{b}|$，$|\overrightarrow{c}|$ 成等比數列

$\therefore |\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{c}|\Rightarrow 20=4(1+t^2)\Rightarrow t=2\ (\because t>0)$

$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(1,2)-(4,2)=(-3,0)$

$\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}=(1,2)-(4,8)=(-3,-6)$

$\therefore \overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{c}$ 所張成的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -3 & -6\end{vmatrix}\right|=18$。

F. 8

出處：第一冊第三章〈多項式函數〉、第三冊第一章〈三角〉

目標：根與係數的關係、三角函數的基本關係

解析：由根與係數的關係可得，另一根為 $\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

兩根之和 $-2(\sin\theta+\cos\theta)=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=\sqrt{5}$，故 $\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

將兩邊平方可得 $1+2\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{5}{4}\Rightarrow\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{1}{8}$

$\therefore \tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=8$。

G. $20x+24$

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式的運算與除法原理

解析：由除法原理得知，可令 $g(x)=(x+1)Q(x)+5$ ……………①

$(f(x))^2=[(x+1)g(x)+2]^2$

$=(x+1)^2(g(x))^2+4(x+1)g(x)+4$ …………………②

將①代入②得

$(f(x))^2=(x+1)^2(g(x))^2+4(x+1)[(x+1)Q(x)+5]+4$

$=(x+1)^2(g(x))^2+4(x+1)^2Q(x)+20(x+1)+4$

$=(x+1)^2[(g(x))^2+4Q(x)]+20x+24$

故餘式為 $20x+24$。

H. 3

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：貝氏定理的應用

解析：利用貝氏定理可知

$$\frac{8}{25}=\frac{\frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100}}{\frac{40}{100}\cdot\frac{5}{100}+\frac{35}{100}\cdot\frac{10}{100}+\frac{25}{100}\cdot\frac{x}{100}}$$

$$\Rightarrow\frac{8}{25}=\frac{40\cdot 5}{40\cdot 5+35\cdot 10+25\cdot x}$$

$$\Rightarrow\frac{8}{25}=\frac{8}{8+14+x}$$

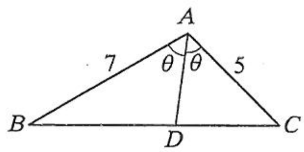
$\Rightarrow 25=22+x\Rightarrow x=3$。

I. $\frac{84}{5}$

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：三角形面積公式與三角函數的基本關係

解析：如右圖，令$\angle BAD=\angle CAD=\theta$，$\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=5$，$\overline{AD}=\frac{7}{2}$



$\triangle ABC$ 面積＝$\triangle ABD$ 面積＋$\triangle ACD$ 面積

由面積公式得

$$\frac{1}{2}\times 7\times 5\times\sin 2\theta=\frac{1}{2}\times 7\times\frac{7}{2}\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times 5\times\frac{7}{2}\times\sin\theta$$

由 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cdot\cos\theta$，將上式 $\frac{1}{2}\times 7\times\sin\theta$ 約分可得

$$5\times 2\times\cos\theta=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\Rightarrow\cos\theta=\frac{3}{5}，\sin\theta=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\sin 2\theta=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

故$\triangle ABC$ 面積為 $\frac{1}{2}\times 7\times 5\times\frac{24}{25}=\frac{84}{5}$。

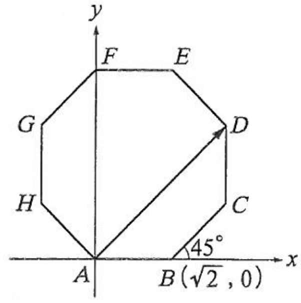
J. $3+2\sqrt{2}$

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：平面向量的線性組合

解析：將 A 定為原點，且正八邊形邊長令為$\sqrt{2}$

建立坐標系，如右圖



正八邊形的每一內角為 135°

$\overrightarrow{BC}=(\sqrt{2}\cdot\cos 45°,\sqrt{2}\cdot\sin 45°)=(1,1)$

$\overrightarrow{CD}=(0,\sqrt{2})$

可得 $\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{AH}=(-1,1)$，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}+1)$

代入 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AH}$ 可得

$(\sqrt{2}+1,\sqrt{2}+1)=x(\sqrt{2},0)+y(-1,1)=(\sqrt{2}x-y,y)$

$$故\begin{cases}\sqrt{2}x-y=\sqrt{2}+1\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\\ y=\sqrt{2}+1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}\end{cases}$$

將②代入①得 $x=2+\sqrt{2}$

故 $x+y=2+\sqrt{2}+\sqrt{2}+1=3+2\sqrt{2}$。