

107 學年度全國高級中學
學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊全

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 5 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記，請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 \square^3 與第 19 列的 \square^8 畫記，如：

18	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 \square^7 與第 21 列的 \square^7 畫記，如：

20	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利

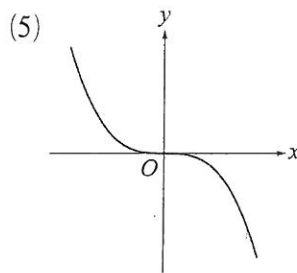
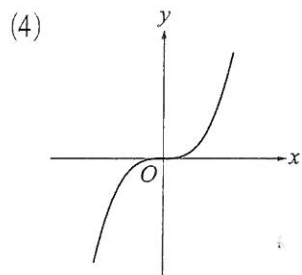
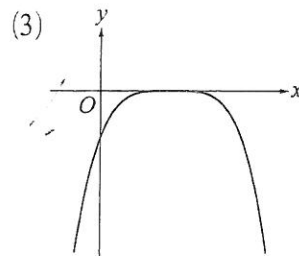
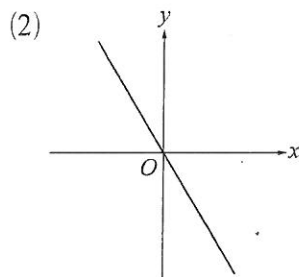
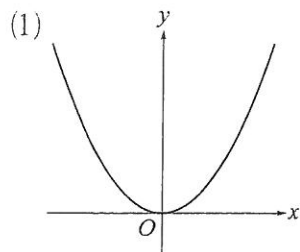


第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $f(x) = ax^n$ 為實係數多項式函數，若 $a \times (-1)^n < 0$ ，則 $f(x)$ 的圖形可能為下列何者？



2. 設投擲兩顆公正骰子一次的點數和為 a ，且 $f(x) = (a-7)x^2 + 4x + 2$ ，已知 $f(x)$ 的圖形為開口向上的拋物線，則 $f(x)$ 的圖形與 x 軸相交於相異兩點的機率為下列何者？

(1) $\frac{5}{36}$

(2) $\frac{1}{5}$

(3) $\frac{5}{18}$

(4) $\frac{1}{3}$

(5) $\frac{3}{5}$

3. 設 a, b, c, d 皆為實數，且 $f(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 + (x-d)^2$ ，已知 $f(2) = 80$ ， $f(6) = 48$ ，則 a, b, c, d 的標準差為下列何者？

- (1) $\sqrt{11}$
- (2) $\sqrt{13}$
- (3) 4
- (4) $\sqrt{19}$
- (5) $\sqrt{21}$

4. 已知等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項 $a_1 > 0$ ，公比 $r > 1$ ，且 $3a_5 + a_7 = 4a_6$ ，若此數列中有兩相異項 a_t, a_s 滿足 $\sqrt{a_t a_s} = a_7$ ，則 $t+s-r$ 之值為下列何者？

- (1) 10
- (2) 11
- (3) 12
- (4) 13
- (5) 14

5. 設 $a > 0$ ， $b = \log_2 5$ ，若 $a^b = 16$ ，則 $a^{(b^2)}$ 之值為下列何者？

- (1) $\sqrt[4]{5}$
- (2) 25
- (3) 32
- (4) 256
- (5) 625

6. 若將 1, 3, 5, 7 四個數字任意排列成一個四位數 $abcd$, 則滿足 $c+d \geq a+b$ 的機率為下列何者? (例如: 四位數 3175, 即滿足 $7+5 \geq 3+1$)

- (1) $\frac{1}{4}$
- (2) $\frac{1}{3}$
- (3) $\frac{2}{3}$
- (4) $\frac{3}{4}$
- (5) $\frac{5}{6}$

7. 試問下列五個數中, 何者最大?

- (1) $\frac{22!}{5!}$
- (2) 10^{11}
- (3) 6^{14}
- (4) $4^5 \times 5^{12}$
- (5) $\sum_{k=0}^{34} C_k^{34}$

二、多選題 (占 25 分)

說明: 第 8 題至第 12 題, 每題有 5 個選項, 其中至少有一個是正確的選項, 請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定, 所有選項均答對者, 得 5 分; 答錯 1 個選項者, 得 3 分; 答錯 2 個選項者, 得 1 分; 答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者, 該題以零分計算。

8. 設 $A(\sqrt{2})$, $B(\sqrt{8})$ 為數線上兩點且 $P(t)$ 為線段 \overline{AB} 上一點, 已知 $a > 0$, $b > 0$,

$\overline{PA} : \overline{PB} = a : b$, 試問下列哪些選項是正確的?

- (1) 若 $a > b$, 則 $|t - \sqrt{2}| < |t - \sqrt{8}|$
- (2) 若 a, b 為有理數, 則 t 必為有理數
- (3) 若 a 為有理數且 b 為無理數, 則 t 必為無理數
- (4) 若 $a = b$, 則 $\sqrt{2}, t, \sqrt{8}$ 成等差數列
- (5) 若 $a = b$, 則 $\sqrt{2}, t, \sqrt{8}$ 成等比數列

9. 設一次函數 $f(x) = ax + b$ 的圖形為斜率大於 0、 y 截距大於 0 的一直線，且與直線 $x = 1$ 交於點 $A(1, k)$ ，若 $f\left(1 - \frac{b}{a}\right) \times f(0) = 9$ ，則 k 之值可能為下列哪些選項？

- (1) $\frac{1}{\sqrt{11} - \sqrt{10}}$
- (2) $\sqrt{19 + 2\sqrt{90}}$
- (3) $5\bar{9}$
- (4) $3^{\sqrt{5}}$
- (5) π

10. 設 $a > 0$ ，若不等式 $|2x + 1| > |3x - a|$ 的其中一個整數解為 $x = 2$ ，則 a 之值可能為下列哪些選項？

- (1) $\frac{1}{107}$
- (2) $\frac{107}{108}$
- (3) $\frac{2019}{2018}$
- (4) $\log_5 107$
- (5) $(\sqrt{11})^{\sqrt{5}}$

11. 設多項式 $f(x) = (x - 12)^{16}$ 展開式中的 x^2 項係數為 a ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $f(x)$ 為偶函數
- (2) 不等式 $f(x) > 0$ 的解為全體實數
- (3) 多項式 $f(x)$ 除以 $(x - 11)(x - 13)$ 的餘式為 1
- (4) a 的最高位數字為 1
- (5) a 的末兩位數為 80

12. 設實係數多項式 $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b$ ，已知 1 為方程式 $f(x) = 0$ 之一根，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) $f(0)f(4) < 0$
- (2) $1 - 3i$ 可能為方程式 $f(x) = 0$ 之一根
- (3) $2 + i$ 可能為方程式 $f(x) = 0$ 之一根
- (4) 若方程式 $f(x) = 0$ 有虛根，則 $f(\pi) > 0$
- (5) 若 $a > 3$ ，則不等式 $f(x) < 0$ 的解為 $x < 1$

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13-30)。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 若集合 $U = \{2^{-2}, 2^{-1}, 2, 2^2, 2^3\}$ ， $a \in U, b \in U$ ，且 $a \neq b$ ，則滿足 $ab > 1$ 的數對 (a, b) 共有 ⑬⑭ 組。

B. 在 1 與 32 之間插入 n 項後，此 $n+2$ 個數成等比數列，若所有項(包含 1 與 32)乘積的整數部分為 10 位數，則 n 至少為 ⑮⑯。

C. 仲逸參加今年的大學個人申請，已知所填的六個校系全部通過第一階段篩選，且各校系第二階段甄試日期如下：

校系	霍金大學 量子學系	柴山大學 大數據系	神崎大學 數學系	宮城大學 AI 系	幻影大學 神學系	浦度大學 精算系
第二階段 甄試日期	4 月 3 日	4 月 11 日	4 月 3 日	4 月 5 日	4 月 3 日	4 月 11 日

仲逸決定從六個校系中至少選一個校系參加第二階段甄試，若甄試日期在同一天的校系，則最多只參加其中一校系的甄試，試問仲逸選擇參加第二階段甄試的情形共有 ⑰⑱ 種。

D. 爾琪諾幼兒園為了因應少子化的衝擊，近幾年推出了以下幾項措施：

(一) 每天上午都有外籍老師親自教導美語

(二) 每星期免費提供兩個時段的才藝班

(三) 每個月的月費全面六折

根據園長 Alice 統計發現 105 年與 106 年學生人數的成長率分別為 5 % 與 10 %，出現逆勢成長的趨勢。若 105 年、106 年、107 年這三年學生人數的平均成長率要超過 25 %，則 107 年的成長率必須至少為 19 20 %。(無條件進位到整數位)

E. 設 $z = ((a+b)+2i)((c-8)+2i)$ ，其中 a, b, c 分別代表投擲一顆公正骰子三次依序出現的點數，試問滿足 z 為實數的序組 (a, b, c) 共有 21 22 組。

F. 彩彩老師統計班上 28 位學生補習的科目數 (x) 與學期總成績的分數 (y)，已知 x, y 的算術平均數分別為 $\mu_x = 3, \mu_y = 60$ ，標準差分別為 σ_x, σ_y ，且相關係數為 $r = \frac{-3}{5}$ ，若班上的小雨目前只有物理與英文兩科有補習，且用 y 對 x 的迴歸直線方程式推估她的學期總成績為 70 分，則 $\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{23}{24 25}$ 。(請化為最簡分數)

G. 若從各位數字皆相異且各位數字和為 8 的所有三位數中任意選出一個三位數，則此數可被 11 整除的機率為 $\frac{26}{27 28}$ 。(請化為最簡分數)

H. 在數列 $\langle a_n \rangle$ 中，已知 $a_2 = 10, a_5 = 23, a_{15} = -8$ 且任意連續四項之和均為 20，則 $a_{108} =$ 29 30。

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(4)	(4)	(1)	(2)	(5)	(3)	(1)	(4)	(1)(2)(3)(4)
題號	10.	11.	12.						
答案	(3)(4)	(3)(4)(5)	(2)(4)(5)						

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：測驗學生對於單項函數圖形的認知能力

解析：(1) \times ：由圖形可知 $a > 0$ 且 n 為正偶數，所以 $ax(-1)^n > 0$ (不合)

(2) \times ：圖形為一直線且斜率為負，所以 $n=1, a < 0 \Rightarrow ax(-1)^n > 0$ (不合)

(3) \times ：由圖形可知 $f(0) \neq 0$ (不合)

(4) \circ ：由圖形可知 $a > 0$ 且 n 為正奇數，所以 $ax(-1)^n < 0$ ，且圖形通過原點

(5) \times ：由圖形可知 $a < 0$ 且 n 為正奇數，所以 $ax(-1)^n > 0$ (不合)

故選(4)。

2. (4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：測驗學生對於二次函數的基本概念及條件機率的計算能力

解析：因為 $f(x)$ 的圖形為開口向上的拋物線

所以 $a-7 > 0 \Rightarrow a > 7$

投擲兩顆公正骰子一次，其點數和為 7 的情形為 $(6, 1), (1, 6), (5, 2), (2, 5), (4, 3), (3, 4)$ ，共有 6 種
又點數和為 k 的方法數與點數和為 $14-k$ 的方法數相同，其中 $k=2, 3, \dots, 6$

所以滿足 $a > 7$ 的方法數為 $\frac{1}{2}(6^2-6)=15$

若 $f(x)$ 的圖形與 x 軸相交於相異兩點

則判別式 $D=4^2-4 \times 2 \times (a-7) > 0 \Rightarrow a < 9$

又滿足 $7 < a < 9$ 的情形為 $(6, 2), (2, 6), (5, 3), (3, 5), (4, 4)$ ，共有 5 種

因此所求機率為 $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

故選(4)。

註：	點數和	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	方法數	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

3. (1)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第二冊第四章〈數據分析〉

目標：測驗學生是否具備利用標準差的定義來解題的能力

解析：展開可得 $f(x)=4x^2-2(a+b+c+d)x+(a^2+b^2+c^2+d^2)$

因為 $f(2)=80, f(6)=48$

所以 $\begin{cases} 16-4(a+b+c+d)+(a^2+b^2+c^2+d^2)=80 \\ 144-12(a+b+c+d)+(a^2+b^2+c^2+d^2)=48 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -4(a+b+c+d)+(a^2+b^2+c^2+d^2)=64 \\ -12(a+b+c+d)+(a^2+b^2+c^2+d^2)=-96 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=20 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=144 \end{cases}$

因此 a, b, c, d 的標準差 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2) - \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2} = \sqrt{36-25} = \sqrt{11}$

故選(1)。

4. (2)

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：測驗學生是否能利用等比數列的一般項來解題

解析：因為 $3a_5 + a_7 = 4a_6$

$$\text{所以可得 } 3a_1r^4 + a_1r^6 = 4a_1r^5$$

$$\Rightarrow a_1r^4(r^2 - 4r + 3) = 0 \Rightarrow (r-1)(r-3) = 0 \Rightarrow r=3 \quad (\text{因為 } r>1)$$

$$\text{又 } \sqrt{a_t a_s} = a_7, \text{ 所以 } a_1r^{t-1} \times a_1r^{s-1} = (a_1r^6)^2$$

$$\Rightarrow r^{t+s-2} = r^{12} \Rightarrow t+s=14$$

$$\text{因此可知 } t+s-r = 14-3=11$$

故選(2)。

5. (5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：測驗學生對於指數律與對數律的基本運算能力

解析：可知 $a^{(b^2)} = (a^b)^b = 16^{\log_2 5} = 16^{\log_{16} 625} = 625$

故選(5)。

6. (3)

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：測驗學生是否能利用對稱性與古典機率來解題

解析：先考慮 $c+d=a+b$ 的情形

因為 $1+3+5+7=16$ ，所以 $c+d=a+b=8$

討論如下

c	1	7	1	7	5	3	5	3
d	7	1	7	1	3	5	3	5
a	3	3	5	5	1	1	7	7
b	5	5	3	3	7	7	1	1

所以共有 8 種

又由對稱性可知 $c+d>a+b$ 的方法數與 $c+d<a+b$ 的方法數一樣

因此 $P(c+d \geq a+b) = P(c+d=a+b) + P(c+d>a+b)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{8}{4!} + \frac{1}{2} \frac{(4!-8)}{4!} \\
 &= \frac{8}{24} + \frac{8}{24} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

故選(3)。

7. (1)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：測驗學生對於二項式定理的應用與比較各數之間的大小關係

解析：(1) $\frac{22!}{5!} = \underbrace{6 \times 7 \times \cdots \times 22}_{17 \text{ 項}} > (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4) \times \underbrace{(5 \times 5 \times \cdots \times 5)}_{12 \text{ 項}} = 4^5 \times 5^{12}$

$$(2) 4^5 \times 5^{12} = 2^{10} \times 5^{12} = 5^2 \times (2 \times 5)^{10} = 25 \times 10^{10} > 10 \times 10^{10} = 10^{11}$$

(3) 因為 $\log 6^{14} = 14 \log 6 \approx 14 \times (0.3010 + 0.4771) = 10.8934$ ，所以 6^{14} 為 11 位數

又 $4^5 \times 5^{12} = 25 \times 10^{10}$ 為 12 位數，因此 $6^{14} < 4^5 \times 5^{12}$

$$(5) \sum_{k=0}^{34} C_k^{34} = (1+1)^{34} = 2^{34} = 4^{17} = \underbrace{4 \times 4 \times \cdots \times 4}_{17 \text{ 項}} < (4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4) \times \underbrace{(5 \times 5 \times \cdots \times 5)}_{12 \text{ 項}} = 4^5 \times 5^{12}$$

故選(1)。

二、多選題

8. (4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：測驗學生對於有理數、無理數、數列的基本認知能力與分點公式的應用

解析：由分點公式可知 $t = \frac{b\sqrt{2} + a\sqrt{8}}{a+b}$

(1) ×：若 $a > b$ ，則 $\overline{PA} > \overline{PB} \Rightarrow |t - \sqrt{2}| > |t - \sqrt{8}|$

(2) ×：若 $a \in \mathcal{Q}, b \in \mathcal{Q}$ ，則 $t = \frac{b\sqrt{2} + a\sqrt{8}}{a+b} = \frac{(2a+b)\sqrt{2}}{a+b} \notin \mathcal{Q}$

(3) ×：反例： $a=1, b=\sqrt{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 1 \times \sqrt{8}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = 2 \in \mathcal{Q}$

(4) ○：若 $a=b$ ，則 $\overline{PA} = \overline{PB} \Rightarrow t - \sqrt{2} = \sqrt{8} - t$ ，即 $\sqrt{2}, t, \sqrt{8}$ 成等差數列

(5) ×：若 $a=b$ ，則可得 $t = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ ，因為 $\sqrt{2} \times \sqrt{8} \neq \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$

所以 $\sqrt{2}, t, \sqrt{8}$ 不為等比數列

故選(4)。

9. (1)(2)(3)(4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：測驗學生對於一次函數圖形的認知及是否能利用算幾不等式來解題

解析：因為 $f(x)$ 的圖形為斜率大於 0、y 截距大於 0 的一直線

所以可知 $a > 0, b > 0$ ，又與直線 $x=1$ 的交點為 $A(1, k)$ ，因此可得 $a+b=k$

若 $f\left(1 - \frac{b}{a}\right) \times f(0) = 9$ ，則 $\left(a\left(1 - \frac{b}{a}\right) + b\right)b = 9 \Rightarrow ab = 9$

由算幾不等式可得 $a+b \geq 2\sqrt{ab} = 6 \Rightarrow k \geq 6$

(1) ○： $\frac{1}{\sqrt{11} - \sqrt{10}} = \sqrt{11} + \sqrt{10} > 6$

(2) ○： $\sqrt{19 + 2\sqrt{90}} = \sqrt{10} + \sqrt{9} > 6$

(3) ○： $5.\bar{9} = 6$

(4) ○： $3^{\sqrt{5}} > 3^2 = 9 > 6$

(5) ×： $\pi < 6$ (不合)

故選(1)(2)(3)(4)。

10. (3)(4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：測驗學生是否具備指數與對數的基本認知能力以及能求出不等式的解

解析：由題意可得 $|2x+1|^2 > |3x-a|^2 \Rightarrow (3x-a)^2 - (2x+1)^2 < 0 \Rightarrow (5x+1-a)(x-a-1) < 0$

$\Rightarrow \frac{a-1}{5} < x < a+1$ ，因為 $x=2$ 為不等式的其中一個整數解，所以 $\frac{a-1}{5} < 2 < a+1 \Rightarrow 1 < a < 11$

〈另解〉因為 $x=2$ 為不等式的其中一個整數解

所以代入可得 $|2 \times 2 + 1| > |3 \times 2 - a|$

$\Rightarrow |6 - a| < 5 \Rightarrow -5 < 6 - a < 5 \Rightarrow 1 < a < 11$

(1) ×： $\frac{1}{107} < 1$ (不合)

(2) ×： $\frac{107}{108} < 1$ (不合)

(3) ○： $1 < \frac{2019}{2018} < 11$

(4) ○： $1 = \log_5 5 < \log_5 107 < \log_5 125 = 3 < 11$

(5) ×： $(\sqrt{11})^{\sqrt{5}} = 11^{\frac{\sqrt{5}}{2}} > 11$ (不合)

故選(3)(4)。

11. (3)(4)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：測驗學生能否結合多項式與指數的性質，並利用二項式定理來解題

解析：(1) \times ：因為 $f(-x) = (-x-12)^{16} = (x+12)^{16} \neq f(x)$

所以 $f(x)$ 不為偶函數

(2) \times ：不等式 $f(x) > 0$ 的解為 $x \in R$ 且 $x \neq 12$

(3) \circ ：設 $f(x) = (x-11)(x-13)Q(x) + m(x-11) + n$

$$f(11) = (11-12)^{16} = 1 \Rightarrow n = 1$$

$$f(13) = (13-12)^{16} = 1 \Rightarrow 2m + 1 = 1 \Rightarrow m = 0$$

所以 $f(x) = (x-11)(x-13)Q(x) + 1$ ，即 $f(x)$ 除以 $(x-11)(x-13)$ 的餘式為 1

(4) \circ ：由二項式定理可得 $(x-12)^{16} = \sum_{k=0}^{16} C_k^{16} \times x^k \times (-12)^{16-k}$

$$\Rightarrow a = C_2^{16} \times (-12)^{16-2} = 120 \times 12^{14} = 12^{15} \times 10$$

$$\Rightarrow \log a = 1 + 15 \log 12 = 1 + 15(2 \log 2 + \log 3)$$

$$\approx 1 + 15(2 \times 0.3010 + 0.4771) = 17.1865 = 17 + 0.1865$$

因為 $\log 1 < 0.1865 < \log 2$ ，所以 a 的最高位數字為 1

(5) \circ ：承(4)可知 $a = 10 \times 12^{15} = 10(10+2)^{15}$

$$= 10(C_0^{15} \times 2^{15} + C_1^{15} \times 2^{14} \times 10 + C_2^{15} \times 2^{13} \times 10^2 + \dots + C_{15}^{15} \times 10^{15})$$

$$= 2^{15} \times 10 + 100k, \text{ 其中 } k \in N$$

又 2^n 的個位數字依序以 2, 4, 8, 6 四個一循環

所以 2^{15} 的個位數字為 8，即 a 的末兩位數為 80

故選(3)(4)(5)。

12. (2)(4)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：測驗學生是否能利用虛根成對定理與多項式函數圖形的概念來解題

解析：由題意可知 $x-1$ 為 $f(x)$ 的因式，由長除法

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x + (a-2) \\ x-1 \overline{) x^3 - 3x^2 + ax + b} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ -2x^2 + ax \\ \underline{-2x^2 + 2x} \\ (a-2)x + b \\ \underline{(a-2)x - (a-2)} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{可得 } f(x) = (x-1)(x^2 - 2x + (a-2))$$

$$\Rightarrow b = -a + 2$$

(1) \times ：反例： $a = -1, b = 3 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

$$\Rightarrow f(0)f(4) = 3 \times (64 - 48 - 4 + 3) > 0$$

(2) \circ ：若 $1-3i$ 為方程式 $f(x) = 0$ 之一根

則由虛根成對定理可知 $1+3i$ 為另一根

即 $x^2 - 2x + 10$ 為 $f(x)$ 的因式，當 $a = 12$ 時， $f(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 10)$

所以 $1-3i$ 可能為方程式 $f(x) = 0$ 之一根

(3) \times ：若 $2+i$ 為方程式 $f(x) = 0$ 之一根

則由虛根成對定理可知 $2-i$ 為另一根

所以方程式 $f(x) = 0$ 的三根為 $1, 2+i, 2-i$ ，由根與係數可得 $1 + (2+i) + (2-i) = 5 \neq 3$ (不合)

(4) \circ ：若方程式 $f(x) = 0$ 有虛根

則 $f(x)$ 的圖形與 x 軸恰有一個交點 $(1, 0)$ ，且圖形右側會往上攀升，即 $f(x) > f(1) = 0$

(5) \circ ：若 $a > 3$ ，則方程式 $x^2 - 2x + (a-2) = 0$ 的判別式 $D = (-2)^2 - 4(a-2) = 12 - 4a < 0$

即對於任意實數 x ， $x^2 - 2x + (a-2) > 0$ 恆成立

所以不等式 $(x-1)(x^2 - 2x + (a-2)) < 0$ 的解為 $x < 1$

故選(2)(4)(5)。

第貳部分：選填題

A. 12

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：評量學生是否具備指數的基本概念，並能利用窮舉法來計算方法數

解析：討論如下

(i)若 $a=2^{-2}$ ，則 $b=2^3$

(ii)若 $a=2^{-1}$ ，則 $b=2^2, 2^3$

(iii)若 $a=2$ ，則 $b=2^2, 2^3$

(iv)若 $a=2^2$ ，則 $b=2^{-1}, 2, 2^3$

(v)若 $a=2^3$ ，則 $b=2^{-2}, 2^{-1}, 2, 2^2$

故共有 $1+2+2+3+4=12$ 組。

B. 10

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：評量學生是否能應用等比數列的性質及利用對數來處理位數問題的能力

解析：設插入的數為 x_1, x_2, \dots, x_n ，因為 $1, x_1, x_2, \dots, x_n, 32$ 成等比，

所以 $1 \times x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n \times 32 = 32^{1+\frac{n}{2}}$ ，又 $32^{1+\frac{n}{2}}$ 的整數部分為 10 位數

$$\text{因此可得 } 9 \leq \log 32^{1+\frac{n}{2}} < 10 \Rightarrow 9 \leq 5 \left(1 + \frac{n}{2}\right) \log 2 < 10 \Rightarrow 2 \left(\frac{9}{5 \log 2} - 1\right) \leq n < 2 \left(\frac{10}{5 \log 2} - 1\right)$$

$$\Rightarrow 9.95 \dots \leq n < 11.28 \dots$$

故 n 至少為 10。

C. 23

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：評量學生是否能讀懂題意，並照題述求出其組合數

解析：由題意可知甄試日期為 4 月 3 日的有三個校系，4 月 5 日的有一個校系，4 月 11 日的有兩個校系
討論如下

(i)仲逸恰選一個校系：方法數為 $C_1^6 = 6$

(ii)仲逸恰選兩個校系：方法數為 $C_1^3 C_1^1 + C_1^3 C_1^2 + C_1^1 C_1^2 = 3 + 6 + 2 = 11$

(iii)仲逸恰選三個校系：方法數為 $C_1^3 C_1^1 C_1^2 = 6$

故共有 $6 + 11 + 6 = 23$ 種。

D. 70

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：評量學生能否讀懂題意，並具備計算平均成長率的能力

解析：設 107 年的成長率為 $r \times 100\%$

$$\text{由題意可得 } (1+0.05)(1+0.1)(1+r) > (1+0.25)^3$$

$$\Rightarrow \frac{21}{20} \times \frac{11}{10} \times (1+r) > \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

$$\Rightarrow 1+r > \left(\frac{5}{4}\right)^3 \times \frac{20}{21} \times \frac{10}{11} = \frac{3125}{1848} \approx 1.69$$

$$\Rightarrow r > 0.69$$

故 107 年的成長率必須至少為 70%。

E. 21

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：評量學生是否具備複數運算的基本能力，並能否結合重複組合來解題

解析：因為 $z = ((a+b)+2i)((c-8)+2i) = ((a+b)(c-8)-4) + (2(a+b)+2(c-8))i \in R$

$$\text{所以 } 2(a+b)+2(c-8)=0$$

$$\Rightarrow a+b+c=8, \text{ 其中 } a, b, c \text{ 為正整數且滿足 } 1 \leq a \leq 6, 1 \leq b \leq 6, 1 \leq c \leq 6$$

$$\text{設 } a'=a-1, b'=b-1, c'=c-1, \text{ 可得 } a'+b'+c'=5, \text{ 其中 } 0 \leq a' \leq 5, 0 \leq b' \leq 5, 0 \leq c' \leq 5$$

所以其解個數為 $H_5^3 = C_5^{3+5-1} = C_5^7 = 21$ ，故序組 (a, b, c) 共有 21 組。

F. $\frac{3}{50}$

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：評量學生是否具備求出迴歸直線方程式的能力

解析：因為迴歸直線必過點 (μ_x, μ_y) ，所以 $(3, 60)$ 為迴歸直線上一點

又小雨的補習科目數為 2，學期總成績為 70 分

所以 $(2, 70)$ 亦為迴歸直線上一點

設迴歸直線的方程式為 $y = ax + b$

$$\text{將 } (3, 60), (2, 70) \text{ 兩點代入可得 } \begin{cases} 3a + b = 60 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2a + b = 70 \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } a = -10$$

$$\text{又迴歸直線的斜率 } a = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}, \text{ 所以 } \frac{-3}{5} \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = -10 \Rightarrow \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{3}{50}.$$

G. $\frac{1}{12}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：評量學生能否依題意計算條件機率

解析：因為 $8 = 7 + 1 + 0 = 6 + 2 + 0 = 5 + 3 + 0 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1$

所以各位數字皆相異且各位數字和為 8 的所有三位數

共有 $2 \times 2! + 2 \times 2! + 2 \times 2! + 3! + 3! = 4 + 4 + 4 + 6 + 6 = 24$ 個

其中可被 11 整除只有 341 與 143，故所求為 $\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$ 。

H. -5

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：評量學生是否能找出數列的規律性

解析：因為任意連續四項之和均為 20，所以 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$\Rightarrow a_5 = a_1 = 23$ ，依此類推可知 $a_{4k+1} = 23$ ，同理 $a_{4k+2} = 10$ ， $a_{4k+3} = -8$

又 $a_{4k} + a_{4k+1} + a_{4k+2} + a_{4k+3} = 20$ ，所以 $a_{4k} = 20 - 23 - 10 - (-8) = -5$

故 $a_{108} = a_{4 \times 27} = -5$ 。