高鳴數學團隊提供
106 學年度學科能力測驗試題詳解

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 已知某校老師玩過「寶可夢」的比率為r_1，而學生玩過的比率為r_2，其中$r_1 \neq r_2$。由下列選項中的資訊，請選出可以判定全校師生玩過「寶可夢」的比率之選項。
(1) 全校老師與學生比率　(2) 全校老師人數　(3) 全校學生人數
(4) 全校師生人數　(5) 全校師生玩過「寶可夢」人數

詳解：(1)

設全校老師人數n_1，學生人數n_2。
因為玩過「寶可夢」的老師有n_1r_1人，學生有n_2r_2人，
所以全校玩過「寶可夢」的比率為$\dfrac{n_1r_1+n_2r_2}{n_1+n_2}=\dfrac{n_1}{n_1+n_2}\times r_1+\dfrac{n_2}{n_1+n_2}\times r_2$，
其中$\dfrac{n_1}{n_1+n_2}$，$\dfrac{n_2}{n_1+n_2}$分別為全校老師與學生的比率，故選(1)。

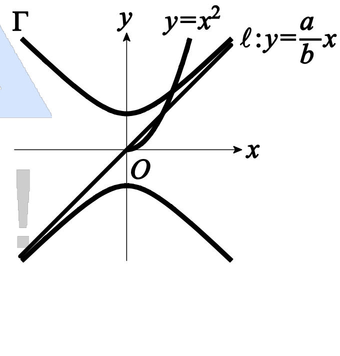
2. 某個手機程式，每次點擊螢幕上的數a後，螢幕上的數會變成a^2。當一開始時螢幕上的數b為正且連續點擊螢幕三次後，螢幕上的數接近81^3。試問實數b最接近下列哪一個選項？
(1) 1.7　(2) 3　(3) 5.2　(4) 9　(5) 81

詳解：(3)

依題意，可得$\left(\left(b^2\right)^2\right)^2=81^3 \Rightarrow b^8=3^{12}$。
因此，$b=3^{\frac{12}{8}}=3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{27}\approx 5.2$，故選(3)。

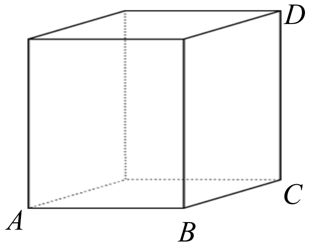
3. 設$\Gamma:\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$為坐標平面上一雙曲線，且其通過第一象限的漸近線為$\ell$。考慮動點$(t,t^2)$，從時間$t=0$時出發。當$t>0$時，請選出正確的選項。
(1) 此動點不會碰到Γ，也不會碰到ℓ　(2) 此動點會碰到Γ，但不會碰到ℓ
(3) 此動點會碰到ℓ，但不會碰到Γ　(4) 此動點會先碰到Γ，再碰到ℓ
(5) 此動點會先碰到ℓ，再碰到Γ

詳解：(5)



動點$(x,y)=\left(t,t^2\right)$為拋物線$y=x^2$上的點。
由圖得知：
此動點會先碰到ℓ（當$x>0$且x接近0時，$x^2<\dfrac{a}{b}x$），
再碰到Γ。故選(5)。

4. 在右下圖的正立方體上有兩質點分別自頂點 A,C 同時出發，各自以等速直線運動分別向頂點 B,D 前進，且在 1 秒後分別同時到達 B,D 。
請選出這段時間兩質點距離關係的正確選項。
(1) 兩質點的距離固定不變
(2) 兩質點的距離越來越小
(3) 兩質點的距離越來越大
(4) 在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最小
(5) 在 $\frac{1}{2}$ 秒時兩質點的距離最大

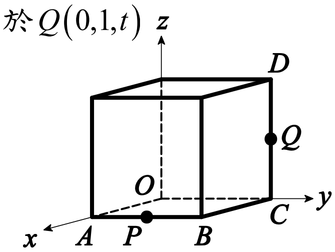


詳解：(4)

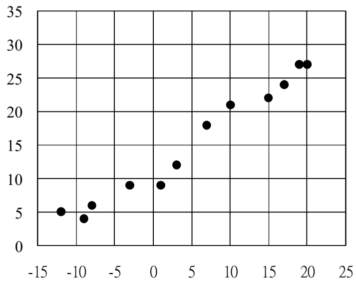
如圖，設 t（$0\le t\le 1$）秒時，一質點位於 $P(1,t,0)$，另一質點位於 $Q(0,1,t)$

因為 $\overline{PQ}=\sqrt{1+(t-1)^2+t^2}=\sqrt{2t^2-2t+2}=\sqrt{2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$，

所以當 $t=\frac{1}{2}$ 時，$\overline{PQ}$ 有最小值 $\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故選(4)。



5. 下圖是某城市在 2016 年的各月最低溫（橫軸 x）與最高溫（縱軸 y）的散佈圖。今以溫差（最高溫減最低溫）為橫軸且最高溫為縱軸重新繪製一散佈圖。試依此選出正確的選項。
最高溫與溫差為正相關，
且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強
最高溫與溫差為正相關，
且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱
最高溫與溫差為負相關，
且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性強
最高溫與溫差為負相關，
且它們的相關性比最高溫與最低溫的相關性弱
最高溫與溫差為零相關

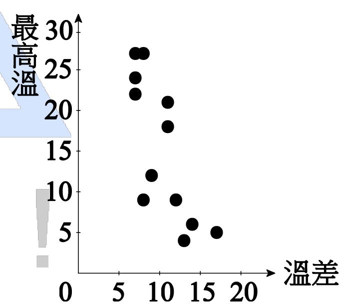


詳解：(4)

依散布圖的點將各月的最低溫，最高溫及溫差列表如下(溫度是大約值)：

最低溫	−12	−9	−8	−3	1	3	7	10	15	17	19	20
最高溫	5	4	6	9	9	12	18	21	22	24	27	27
溫差	17	13	14	12	8	9	11	11	7	7	8	7

再以溫差為橫軸，最高溫為縱軸繪製散布圖如下：
因為這散布圖顯示溫差越大最高溫有越低的趨勢，
所以兩者為負相關，又此圖比「最高溫與最低溫的散布圖」較不接近一直線，因此相關性較弱。故選(4)。



6. 試問有多少個實數 x 滿足 $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ 且 $\cos x^{\circ} \le \cos x$？

(1) 0 個　　(2) 1 個　　(3) 2 個

(4) 4 個　　(5) 無窮多個

詳解：(1)

因 $\pi \approx 3.14$，所以 $\frac{\pi}{2} \approx 1.57$，$\frac{3\pi}{2} \approx 4.71$，

即 x° 約介於 1.57° 與 4.71° 之間，因此 $\cos x^{\circ} > 0$。

又因 $\frac{\pi}{2}$ 弧度 $\le x \le \frac{3\pi}{2}$ 弧度，所以 $\cos x < 0$ 或 $\cos x = 0$。

於是 $\cos x^{\circ}$ 恆大於 $\cos x$，故選(1)。

7. 小明想要安排從星期一到星期五共五天的午餐計畫。
他的餐點共有四種選擇：牛肉麵、大滷麵、咖哩飯及排骨飯。
小明想要依據下列兩原則來安排他的午餐：
（甲）每天只選一種餐點但這五天中每一種餐點至少各點一次
（乙）連續兩天的餐點不能重複且不連續兩天吃麵食
根據上述原則，小明這五天共有幾種不同的午餐計畫？
(1) 52　(2) 60　(3) 68　(4) 76　(5) 84

詳解：(2)

令 R 表飯，N 表麵。分類如下：

(1) 三 N：$NRNRN \to$ 有 $C_1^2 \times \frac{3!}{2!} \times 2! = 12$ 種

(2) 二 N：①$RNRNR \to$ 有 $C_1^2 \times \frac{3!}{2!} \times 2! = 12$ 種

$$② \left.\begin{matrix} RRNRN \\ RNRRN \\ NRRNR \\ NRNRR \end{matrix}\right\} \text{有 } 4 \times \left(2! \times C_1^2 \times 2!\right) = 32 \text{種}$$

③$NRRRN \to$ 有 $2! \times C_1^2 = 4$ 種

根據加法原理，共 $12 + 12 + 32 + 4 = 60$ 種。故選(2)。

二、多選題

8. 設 m,n 為小於或等於 4 的相異正整數且 a,b 為非零實數。已知函數 $f(x)=ax^m$ 與函數 $g(x)=bx^n$ 的圖形恰有 3 個相異交點，請選出可能的選項。
(1) m,n 皆為偶數且 a,b 同號　(2) m,n 皆為偶數且 a,b 異號
(3) m,n 皆為奇數且 a,b 同號　(4) m,n 皆為奇數且 a,b 異號
(5) m,n 為一奇一偶

詳解：(1)(3)

解 $\begin{cases} y=ax^m \\ y=bx^n \end{cases} \Rightarrow ax^m=bx^n \Rightarrow x^m=\frac{b}{a}x^n$

不失一般性，選滿足方程式有3個相異實根的選項：

(1) O：$x^4=\frac{b}{a}x^2 \Rightarrow x^2\left(x^2-\frac{b}{a}\right)=0 \Rightarrow x=0$（重根）或 $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$，有3個相異實根。

(2) X：同(1)，因為 $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ 為虛數，所以方程式恰1個實根。

(3) O：$x^3=\frac{b}{a}x \Rightarrow x(x^2-\frac{b}{a})=0 \Rightarrow x=0$ 或 $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$，有3個相異實根。

(4) X：同(3)，因為 $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ 為虛數，所以方程式恰1個實根。

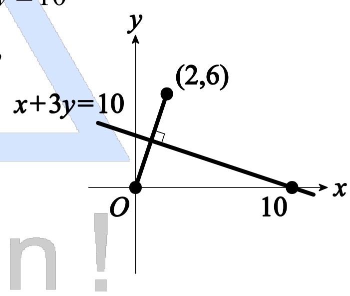
(5) X：令 $m=4$，$n=3$，則 $x^4=\frac{b}{a}x^3 \Rightarrow x^3\left(x-\frac{b}{a}\right)=0 \Rightarrow x=0$ 或 $\frac{b}{a}$，有 2 個相異實根，得知此選項不正確。

故選(1)(3)。

9. 設 Γ 為坐標平面上的圓，點 $(0,0)$ 在 Γ 的外部且點 $(2,6)$ 在 Γ 的內部。請選出正確的選項。
(1) Γ 的圓心不可能在第二象限
(2) Γ 的圓心可能在第三象限且此時 Γ 的半徑必定大於10
(3) Γ 的圓心可能在第一象限且此時 Γ 的半徑必定小於10
(4) Γ 的圓心可能在 x 軸上且此時圓心的 x 坐標必定小於10
(5) Γ 的圓心可能在第四象限且此時 Γ 的半徑必定大於10

詳解：(5)

點 $(0,0)$ 與 $(2,6)$ 連線段的中垂線為 $y-3=-\frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow x+3y=10$。



依題意，利用「中垂線上的點到兩端點等距離」的性質，得知圓心落在半平面 $x+3y>10$ 的區域內，即點 $(2,6)$ 那一側。故選(5)。

10. 坐標空間中有三直線 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$，$L_2:\begin{cases}x-2y+2z=-4\\x+y-4z=5\end{cases}$，$L_3:\begin{cases}x=-t\\y=-2-t\\z=4+4t\end{cases}$，

t 為實數。請選出正確的選項。

(1) L_1與L_2的方向向量互相垂直
(2) L_1與L_3的方向向量互相垂直
(3) 有一個平面同時包含L_1與L_2
(4) 有一個平面同時包含L_1與L_3
(5) 有一個平面同時包含L_2與L_3

詳解： (2)(3)(4)

將 L_1、L_2 改寫為參數式，得

$L_1:\begin{cases}x=1+2s\\y=-1+2s\\z=s\end{cases}$，$s\in\mathbb{R}$、$L_2:\begin{cases}x=2+2k\\y=3+2k\\z=k\end{cases}$，$k\in\mathbb{R}$。

並設 L_1 的方向向量為 $\overrightarrow{\ell_1}=(2,2,1)$，$L_2$ 的方向向量為 $\overrightarrow{\ell_2}=(2,2,1)$。

(1) X：因為 $\overrightarrow{\ell_1}\cdot\overrightarrow{\ell_2}=(2,2,1)\cdot(2,2,1)=9\neq 0$，所以 $\overrightarrow{\ell_1}$ 與 $\overrightarrow{\ell_2}$ 不垂直。

(2) O：因為 $\overrightarrow{\ell_1}\cdot\overrightarrow{\ell_3}=(2,2,1)\cdot(-1,-1,4)=0$，所以 $\overrightarrow{\ell_1}\perp\overrightarrow{\ell_3}$。

(3) O：將 L_1 上的點 $(1,-1,0)$ 代入 L_2，得 $\begin{cases}1=2+2k\\-1=3+2k\\0=k\end{cases}$（不合）

又 $\overrightarrow{\ell_1}\,//\,\overrightarrow{\ell_2}$，因此 $L_1\,//\,L_2$，於是此選項正確。

(4) O：解 $\begin{cases}1+2s=-t\\-1+2s=-2-t\\s=4+4t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2s+t=-1\\2s+t=-1\\s-4t=4\end{cases}\Rightarrow t=-1$，$s=0$。

得知 L_1 與 L_3 交一點，於是此選項正確。

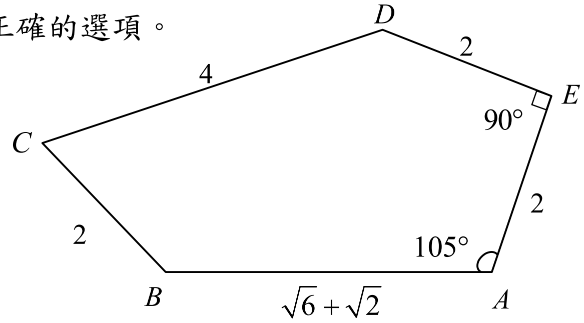
(5) X：解 $\begin{cases}2+2k=-t\\3+2k=-2-t\\k=4+4t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2k+t=-2\\2k+t=-5\\k-4t=4\end{cases}\Rightarrow t$，$k$ 無解。

得知 L_2 與 L_3 歪斜，於是此選項不正確。

故選(2)(3)(4)。

11. 最近數學家發現一種新的可以無縫密舖平面的凸五邊形 $ABCDE$，其示意圖如下。關於這五邊形，請選出正確的選項。

(1) $\overline{AD}=2\sqrt{2}$
(2) $\angle DAB=45°$
(3) $\overline{BD}=2\sqrt{6}$
(4) $\angle ABD=45°$
(5) ΔBCD 的面積為 $2\sqrt{2}$



詳解： (1)(4)

(1) O：利用畢氏定理，得 $\overline{AD}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ 。
(2) X：$\angle DAB=105°-45°=60°$ 。
(3) X：利用餘弦定理，得

$$\overline{BD}^2=(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-2(\sqrt{6}+\sqrt{2})(2\sqrt{2})\cos 60°$$

$=(8+4\sqrt{3})+8-(4\sqrt{3}+4)=12$，即 $\overline{BD}=2\sqrt{3}$ 。

(4) O：利用正弦定理，得 $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60°}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin\angle ABD}\Rightarrow 2\sqrt{3}\sin\angle ABD=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

解得 $\sin\angle ABD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\angle ABD=45°$ 。

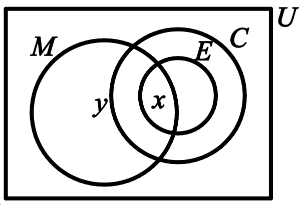
(5) X：在 $\triangle BCD$ 中，因為 $4^2=2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2$，

所以 $\triangle BCD$ 為直角三角形，其面積為 $\dfrac{2\times 2\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$。故選(1)(4)。

12. 某班級 50 位學生，段考國文、英文、數學及格的人數分別為 45、39、34 人，且英文及格的學生國文也都及格。現假設數學和英文皆及格的有 x 人，數學及格但英文不及格的有 y 人。請選出正確的選項。

(1) $x+y=39$ (2) $y\le 11$
(3) 三科中至少有一科不及格的學生有 $39-x+y$ 人
(4) 三科中至少有一科不及格的學生最少有 11 人
(5) 三科中至少有一科不及格的學生最多有 27 人

詳解： (2)(5)



設 C, E, M 分別表國文，英文，數學及格的人所成的集合，依題意畫文氏圖如下（U 表全班所成的集合）：

(1) X：$x+y=n(M)=34$ 。
(2) O：$y\le n(E')=50-39=11$ 。
(3) X：至少一科不及格人數 $=n(U)-n(M\cap E\cap C)=50-x$ 。
(4) X：因為 x 最大為 $n(M)=34$，所以 $50-x$ 最小為 $50-34=16$ 。
(5) O：因為 y 最大為 11 且 $x+y=34$，所以 x 最小為 $34-11=23$，因此 $50-x$ 最大為 $50-23=27$ 。

故選(2)(5)。

13. 空間中有一四面體 $ABCD$。假設 $\overline{AD}$ 分別與 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 垂直，請選出正確的選項。

(1) $\overline{DB}\cdot\overline{DC}=\overline{DA}^2-\overline{AB}\cdot\overline{AC}$

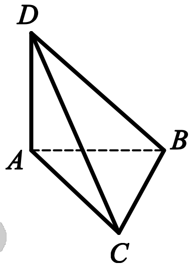
(2) 若 $\angle BAC$ 是直角，則 $\angle BDC$ 是直角

(3) 若 $\angle BAC$ 是銳角，則 $\angle BDC$ 是銳角

(4) 若 $\angle BAC$ 是鈍角，則 $\angle BDC$ 是鈍角

(5) 若 $\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$，則 $\angle BDC$ 是銳角

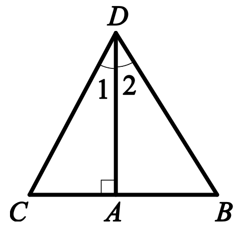
詳解：(3)(5)



依題意，圖示如右：

(1) X：利用向量的拆解，得

$$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})$$
$$=\left|\overrightarrow{DA}\right|^2+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$
$$=\overline{DA}^2+0+0+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{DA}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\text{。}$$



(2) X：直觀來看：$\angle BAC$ 大於 $\angle BDC$。
因此，若 $\angle BAC=90^\circ$，則 $\angle BDC<90^\circ$。

(3) O：與(2)同理，若 $\angle BAC<90^\circ$，則 $\angle BDC<90^\circ$。

(4) X：與(2)同理，當 $\angle BAC>90^\circ$ 時，並不保證 $\angle BDC>90^\circ$。

(5) O：先用極端值來看：當 $\angle BAC$ 張到最大，即成一直線時，
如圖所示，此時 A、B、C、D 四點共平面。
因為 $\overline{AB}<\overline{DA}$ 且 $\overline{AC}<\overline{DA}$，所以 $0^\circ<\angle 1<45^\circ$，$0^\circ<\angle 2<45^\circ$，
得 $0^\circ<\angle 1+\angle 2<90^\circ$，即 $\angle BDC$ 是銳角，推得此選項正確。

故選(3)(5)。

第貳部分：選填題

A. 遞迴數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_n=a_{n-1}+f(n-2)$，其中 $n\geq 2$ 且 $f(x)$ 為二次多項式。若 $a_1=1$、$a_2=2$、$a_3=5$、$a_4=12$，則 $a_5=$ ⑭⑮ 。

詳解：$a_5=25$

將 $n=2, 3, 4$ 代入 $a_n=a_{n-1}+f(n-2)$，得

$$\begin{cases}a_2=a_1+f(0)\\a_3=a_2+f(1)\\a_4=a_3+f(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2=1+f(0)\\5=2+f(1)\\12=5+f(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(0)=1\\f(1)=3\\f(2)=7\end{cases}$$

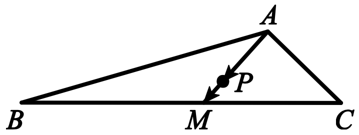
設 $f(x)=ax^2+bx+c$，得 $\begin{cases}c=1\\a+b+c=3\\4a+2b+c=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=1\end{cases}$

即 $f(x)=x^2+x+1$，得 $f(3)=3^2+3+1=13$。

故 $a_5=a_4+f(3)=12+13=25$。

B. 在坐標平面上，ΔABC 內有一點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=(\frac{4}{3},\frac{5}{6})$ 及 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$。若 A, P 連線交 $\overline{BC}$ 於 M，則 $\overrightarrow{AM}=(\frac{⑯⑰}{⑱⑲},\frac{⑳㉑}{㉒㉓})$。（化成最簡分數）。

詳解： $\overrightarrow{AM}=(\frac{40}{21},\frac{25}{21})$



設 $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AP}$，則

$\overrightarrow{AM}=t(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC})=\frac{t}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{5}\overrightarrow{AC}$。

因為 M 在 $\overline{BC}$ 上，所以 $\frac{t}{2}+\frac{t}{5}=1\Rightarrow t=\frac{10}{7}$。

故 $\overrightarrow{AM}=\frac{10}{7}\overrightarrow{AP}=\frac{10}{7}(\frac{4}{3},\frac{5}{6})=(\frac{40}{21},\frac{25}{21})$。

C. 若 a 為正整數且方程式 $5x^3+(a+4)x^2+ax+1=0$ 的根都是有理根，則 $a=$ ㉔。（化成最簡分數）

詳解： $a=7$

因為有三個有理根，所以有三個整係數一次因式，
又由牛頓定理知：
整係數一次因式只可能是 $x+1,\ x-1,\ 5x+1,\ 5x-1$。
由 a 是正整數及比較首項係數、常數項，得
$5x^3+(a+4)x^2+ax+1=(5x+1)(x+1)(x+1)=5x^3+11x^2+7x+1$。故 $a=7$。

D. 設 $a_1,a_2,\ldots,a_9$ 為等差數列且 k 為實數。若方程組 $\begin{cases}a_1x-a_2y+2a_3z=k+1\\a_4x-a_5y+2a_6z=-k-5\\a_7x-a_8y+2a_9z=k+9\end{cases}$ 有解，則 $k=$ ㉕㉖。

詳解： $k=-5$

設公差為 d
由第二式減第一式，得 $3dx-3dy+6dz=-2k-6$……④
由第三式減第二式，得 $3dx-3dy+6dz=2k+14$……⑤
因為方程組有解，所以由④，⑤得知 $-2k-6=2k+14\Rightarrow -4k=20$
解得 $k=-5$。

E. 設 a,b,x 皆為正整數且滿足 $a\le x\le b$ 及 $b-a=3$。若用內插法從 $\log a,\log b$ 求得 $\log x$ 的近似值為

$$\log x\approx\frac{1}{3}\log a+\frac{2}{3}\log b=\frac{1}{3}(1+2\log 3-\log 2)+\frac{2}{3}(4\log 2+\log 3)$$，

則 x 的值為 27 28 。

詳解： $x=47$

原式 $=\frac{1}{3}(1+2\log 3-\log 2)=\frac{1}{3}\log(10\times 3^2\div 2)=\frac{1}{3}\log 45$

$\Rightarrow \frac{2}{3}(4\log 2+\log 3)=\frac{2}{3}\log(2^4\times 3)=\frac{2}{3}\log 48$

所以 $a=45$，$b=48$。

又因為 $\log x\approx\frac{1}{3}\log a+\frac{2}{3}\log b$，所以 x 位於 45，48 的 2：1 位置。

故 $x=\frac{1\times 45+2\times 48}{2+1}=47$。

F. 一隻青蛙位於坐標平面的原點，每步隨機朝上、下、左、右跳一單位長，總共跳了四步。青蛙跳了四步後恰回到原點的機率為 $\frac{29}{30\ 31}$。（化成最簡分數）

詳解： $\frac{9}{64}$

樣本空間個數為 $4^4=256$，跳回原點的情形，可分以下 3 類：

(1) 上，下，左，右：有 $4!=24$ 種

(2) 上，上，下，下：有 $\frac{4!}{2!2!}=6$ 種

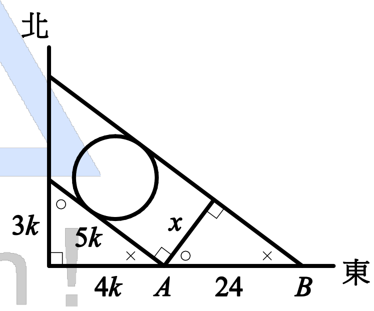
(3) 左，左，右，右：有 $\frac{4!}{2!2!}=6$ 種

共 $24+6+6=36$ 種，故所求機率為 $\frac{36}{256}=\frac{9}{64}$。

G. 地面上甲、乙兩人從同一地點同時開始移動。甲以每秒 4 公尺向東等速移動，乙以每秒 3 公尺向北等速移動。在移動不久之後，他們互望的視線被一圓柱體建築物阻擋了 6 秒後才又相見。此圓柱體建築物底圓的直徑為 32 33 . 34 公尺。

詳解： 14.4

依題意，圖示如右：



經 6 秒甲走 $\overline{AB}=6\times 4=24$ 公尺

因為圖中二個直角三角形相似，所以 $\frac{x}{24}=\frac{3}{5}\Rightarrow x=\frac{72}{5}=14.4$

故底圓的直徑為 14.4 公尺。