臺北區 106 學年度第一學期
第一次學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～二冊全

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記，請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利

99363103-26

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $a=9^{3\sqrt{3}}$，$b=27\sqrt[3]{3}$，$c=9\sqrt[5]{729}$，則 a，b，c 的大小順序為下列哪一個選項？
   (1) $a>b>c$
   (2) $a>c>b$
   (3) $b>a>c$
   (4) $c>a>b$
   (5) $b>c>a$

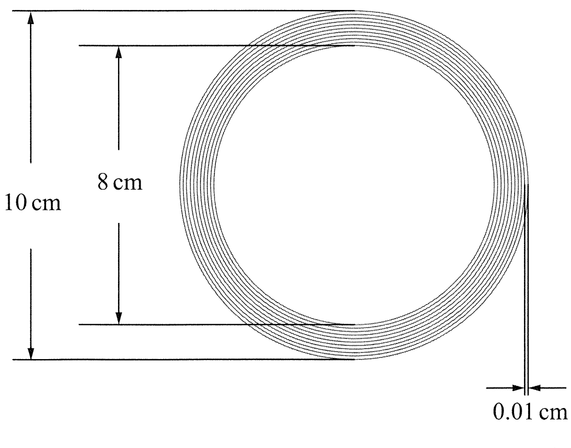
2. 一袋中有大小相同的黑球、白球與紅球共 10 個，每球被取得的機會均等。已知從袋中任意取出一球，得到黑球的機率為 $\frac{2}{5}$，從袋中任意取出 2 個球，至少取得一個白球的機率為 $\frac{7}{9}$，則袋中白球的個數為多少？
   (1) 2 個
   (2) 3 個
   (3) 4 個
   (4) 5 個
   (5) 6 個

3. 方程式 $|2x-|x-1||=5$ 的所有根之和為多少？
   (1) $\frac{2}{3}$
   (2) $\frac{8}{3}$
   (3) $\frac{14}{3}$
   (4) 8
   (5) 10

4. 假設 n 為自然數，且滿足不等式 $1+10^{\log\frac{9}{8}}+(10^2)^{\log\frac{9}{8}}+(10^3)^{\log\frac{9}{8}}+\cdots\cdots+(10^{n-1})^{\log\frac{9}{8}}>792$，則 n 的最小值為多少？
(1) 36
(2) 37
(3) 38
(4) 39
(5) 40

5. 若整係數方程式 $x^3-10x^2+ax+b=0$ 有 3 個正整數根，則 b 有多少種可能值？
(1) 2 種
(2) 6 種
(3) 7 種
(4) 8 種
(5) 36 種

6. 市面上所販賣的膠帶都是繞在卷軸上，以整卷的方式出售，如下圖所示。今有一卷膠帶卷軸的直徑為 8 cm，膠帶的厚度為 0.01 cm，整卷膠帶的直徑為 10 cm。若卷軸的厚度不計，則此卷膠帶的總長度最接近下列哪個選項？



(1) 2500 cm
(2) 2650 cm
(3) 2800 cm
(4) 2950 cm
(5) 3100 cm

二、多選題（占 35 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 已知多項式函數

$$f(x)=-\frac{1}{3}(x-2)(x-3)(x-4)+\frac{5}{2}(x-1)(x-3)(x-4)-5(x-1)(x-2)(x-4)+\frac{17}{6}(x-1)(x-2)(x-3)，$$

請選出正確的選項。

(1) $f(1)=2$

(2) $f(0)=1$

(3) $f(-1)=-2$

(4) $f(-i)=-f(i)\quad(i=\sqrt{-1})$

(5) $f(x)$ 為三次多項式函數

8. 設 $f(x)=x^{2n}(x^2+ax+b)$，n 為自然數，若 $f(x)$ 除以 $(x-3)^2$ 的餘式為 $3^{2n}(x-3)$。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $f(3)=0$

(2) $a=1$

(3) $b=6$

(4) $f(x)=0$ 恰有 $2n$ 個實根

(5) $f(x)$ 的圖形與 x 軸只有三個相異的交點

9. 方程式 $2^{x-a}+b=2^x$，其中 a 與 b 為非零的實數，請選出可能的正確選項。

(1)若 $a>0$ 且 $b>0$ 則此方程式有實根

(2)若 $a>0$ 且 $b<0$ 則此方程式有實根

(3)若 $a<0$ 且 $b>0$ 則此方程式有實根

(4)若 $a<0$ 且 $b<0$ 則此方程式有實根

(5)若此方程式有實根，則實根必只有一個

10. 設 a_1，a_2，……，a_n，……為一實數數列，且對所有的正整數 n 滿足
$a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n=n^2+3n+1$。試問下列哪些選項是正確的？
(1)此數列中的每一項都是正數
(2)當 $i<j$ 時，則 $a_i\le a_j$
(3)此數列中的每一項都大於 2
(4)此數列中為整數的項有無限多個
(5) $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\cdots\times a_n$ 為定值(n 為正整數)

11. 將 7 名高三學生今年學測的數學成績，由小到大依序排列，得出此 7 人的數學成績中位數為 12 級分，而唯一的眾數是 10 級分。關於此 7 人學測的數學成績，下列哪些選項是正確的？
(1)此 7 名學生數學成績全距之最小值為 3 級分
(2)當數學成績全距為最小值時，此 7 名學生數學級分只有 3 種相異的分數
(3)當數學成績全距為最小值時，此 7 名學生數學級分的可能組合只有一種
(4)當數學成績全距為最小值時，此 7 名學生數學級分的平均值高於中位數
(5)當數學成績全距為最小值時，此 7 名學生數學級分的標準差小於 2 級分

12. 有 30 筆數據 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，……，(x_{30}, y_{30})，其中 $\sum_{i=1}^{30}x_i=1800$，$\sum_{i=1}^{30}y_i=2100$，x 與 y 相關係數為 0.9，且 y 對 x 的迴歸直線過點 $(20, 40)$，試問下列哪些選項是正確的？
(1)迴歸直線的斜率為 0.9
(2) x 的標準差大於 y 的標準差
(3)迴歸直線過點 $(30, 50)$
(4)若 $u_i=4x_i+6$，$v_i=-6y_i+20$　$(i=1，2，3，\cdots\cdots，30)$，則 u 與 v 的相關係數為 0.9
(5)函數 $f(x)=\sum_{i=1}^{30}(x-x_i)^2$ 在 $x=60$ 時有最小值

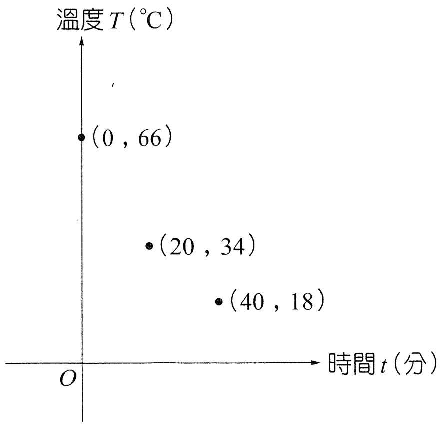
13. 根據美國一項對於國民罹患癌症死亡的病例研究報告指出，肝癌是亞裔美國人罹患癌症的死亡主因之一；而導致肝癌的其中一個重大因素，就是 B 型肝炎病毒，而 B 型肝炎病毒更可以透過體液傳播，美國一半的 B 型肝炎帶原者都是亞裔，比其他種族高危險。華埠醫療中心醫生表示，B 型肝炎在亞洲非常普遍，尤其是透過母體傳染給嬰兒，不少亞裔新移民亦將 B 型肝炎病毒一同「移民」到美國，現在每 12 個亞裔就有 1 個帶有 B 型肝炎病毒。而且雖然亞裔人口只占美國人口的 5 ％，但全美國 B 型肝炎帶原者中亞裔就占 50 ％，比例相當高。根據上述研究報告內容，請選出正確的選項。
(1)亞裔的肝癌患者人數高於非亞裔的肝癌患者人數
(2)亞裔 B 型肝炎帶原者之人數與非亞裔 B 型肝炎帶原者之人數相當
(3)亞裔 B 型肝炎帶原者之比率為非亞裔 B 型肝炎帶原者之比率的 19 倍
(4)隨機選取一個非亞裔驗血，此人為 B 型肝炎帶原者的機率高於 5 ％
(5)隨機選取一人驗血，檢驗結果不是 B 型肝炎帶原者，則此人為亞裔的機率是 50 ％

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(14－31)。
2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 將 6 位轉學生隨機分發到 A、B、C 三個班級，其中 A 班分 1 位，B 班分 2 位，C 班分 3 位，則甲、乙兩位轉學生分到相同班級有 __⑭⑮__ 種分法。

B. 將一杯熱咖啡放入冰箱的冷藏室，記錄冷藏時間與咖啡的溫度得到右圖的數據，已知咖啡的溫度 T 與冷藏時間 t 的關係為 $T(t)=A\cdot 2^{\alpha t}+k$，其中 A、α、k 都是常數，倘若這杯咖啡溫度要降到 4 ℃，冷藏時間大約要 m 分鐘，則 $m=$ __⑯⑰⑱__ 。(四捨五入取至整數)



C. 我們可以將正整數 n 寫成一個或多個正整數的和，同時將不同的順序視為不同的方式。例如：$3=2+1=1+2=1+1+1$，則 3 有四種不同的相加方式。如上所述，試問 12 有 ⑲⑳㉑㉒ 種不同的相加方式。

D. N 為正整數，定義 $[\log_3 N]$ 為 $\log_3 N$ 的整數部分，試求 $\sum_{x=1}^{100}[\log_3 x]=$ ㉓㉔㉕ 。

E. 已知 $a=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ ，$b=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ ，求 $a^2+b^2=$ ㉖ 。

F. 已知三次函數 $f(x)=2x^3-2017x^2-106x+5$，設 a、b、c 為三個相異實數，若

$$g(x)=3\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+3\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+3\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)},$$

且 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，$f(c)=g(c)$，則 $abc=$ ㉗㉘ 。

G. 阿明參加同樂會摸彩，摸彩箱中有 15 支籤，其中有一支籤獎金金額為 1000 元，有兩支籤獎金金額為 500 元，有三支籤獎金金額為 300 元，有四支籤獎金金額為 100 元，另外五支籤為「銘謝惠顧」。摸彩規則如下：每次限抽一支籤，若抽中有獎金的籤，可獲得籤上所標示的獎金金額，若抽中「銘謝惠顧」的籤，則不放回箱中並繼續摸彩，直到抽中有獎金的籤為止，但是得獎的金額必須減半，例如：抽中兩支「銘謝惠顧」後才抽中 1000 元的話，則可獲得 500 元的獎金。請問根據此規則，阿明獲得獎金超過 310 元的機率為 $\dfrac{㉙}{㉚㉛}$ 。(化為最簡分數)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和 $S_n=\dfrac{n[2a+(n-1)d]}{2}$

   首項為 a，公比為 r $(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\right)-n\mu_X^{\,2}\right)}$

3. 二維數據 (X,Y)：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)

   相關係數 $r_{XY}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線(最適合直線)方程式為 $y-\mu_Y=r_{XY}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

4. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$
5. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(1)	(4)	(2)	(5)	(4)	(3)	(1)(2)	(1)(3)(5)	(1)(4)(5)
題號	10.	11.	12.	13.					
答案	(1)(3)	(1)(2)(3)(5)	(2)(5)	(2)(3)					

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (1)

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：利用指數律化簡並比較大小

解析：$a=9^{3\sqrt{3}}=3^{6\sqrt{3}}$，$b=27\sqrt[3]{3}=3^{3\frac{1}{3}}$，$c=9\sqrt[5]{729}=3^{3\frac{1}{5}}$

$\because 6\sqrt{3}>3\frac{1}{3}>3\frac{1}{5}$　$\therefore a>b>c$

故選(1)。

2. (4)

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：了解組合的意義與機率的定義

解析：假設袋中黑球、白球、紅球個數分別為 x、y、z 個

其中 x，y，z 滿足 $x+y+z=10$，$\dfrac{x}{10}=\dfrac{2}{5}$，$1-\dfrac{C_2^{x+z}}{C_2^{10}}=\dfrac{7}{9}$

可得 $x=4$，$y=5$，$z=1$，所以白球有 5 個

故選(4)。

3. (2)

難易度：中偏易

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：解含絕對值的一次方程式

解析：① $x\geq 1$ 時

$|2x-|x-1||=5$

$\Rightarrow |2x-(x-1)|=5$

$\Rightarrow |2x-x+1|=5$

$\Rightarrow |x+1|=5$

$\Rightarrow x+1=\pm 5$

$\Rightarrow x=4$ 或 -6(-6 不合)

② $x<1$ 時

$|2x-|x-1||=5$

$\Rightarrow |2x-(1-x)|=5$

$\Rightarrow |2x+x-1|=5$

$\Rightarrow |3x-1|=5$

$\Rightarrow 3x-1=\pm 5$

$\Rightarrow x=-\dfrac{4}{3}$ 或 2 (2 不合)

$\therefore$方程式 $|2x-|x-1||=5$ 的根為 4 或 $-\dfrac{4}{3}$

所求即為 $4+\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{8}{3}$

故選(2)。

4. (5)

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數、對數的化簡與對數的運用

解析：原式 $\Rightarrow 1+10^{\log\frac{9}{8}}+10^{2\log\frac{9}{8}}+10^{3\log\frac{9}{8}}+\cdots\cdots+10^{(n-1)\log\frac{9}{8}}>792$

$\Rightarrow 1+10^{\log\frac{9}{8}}+10^{\log\left(\frac{9}{8}\right)^2}+10^{\log\left(\frac{9}{8}\right)^3}+\cdots\cdots+10^{\log\left(\frac{9}{8}\right)^{n-1}}>792$

$\Rightarrow 1+\frac{9}{8}+\left(\frac{9}{8}\right)^2+\left(\frac{9}{8}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{9}{8}\right)^{n-1}>792$

$\Rightarrow \dfrac{1\times\left[\left(\frac{9}{8}\right)^n-1\right]}{\frac{9}{8}-1}>792 \Rightarrow \left(\frac{9}{8}\right)^n>100$

不等式兩邊取 log 得 $\log\left(\frac{9}{8}\right)^n>\log 100=2$

$\Rightarrow n(\log 9-\log 8)>2 \Rightarrow n>\dfrac{2}{\log 9-\log 8}=\dfrac{2}{2\times 0.4771-3\times 0.3010}\approx 39.06$

∴最小自然數 n 為 40

故選(5)。

5. (4)

難易度：易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：整係數多項式方程式的一次因式檢驗法

解析：設 3 個正整數根為 α、β、γ 且 $\alpha\le\beta\le\gamma$

則 $x^3-10x^2+ax+b=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

展開後得到 $x^3-10x^2+ax+b=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma$

則 $\alpha+\beta+\gamma=10$ 且 $\alpha\beta\gamma=-b$

符合上述條件的(α, β, γ)有

$(1,1,8)$，$(1,2,7)$，$(1,3,6)$，$(1,4,5)$，$(2,2,6)$，$(2,3,5)$，$(2,4,4)$，$(3,3,4)$，共 8 組

b 值可能為 -8，-14，-18，-20，-24，-30，-32，-36，共 8 種

故選(4)。

6. (3)

難易度：易

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：連結生活中的情境與等差級數的和

解析：將整卷膠帶看成是一圈圈直徑成等差數列的圓所繞成，

卷軸的直徑為 8 cm，公差為 0.02 cm，共 100 項，所以最內圈的膠帶長度應為 8.02π cm

因此膠帶的總長度約為 $(8.02+8.04+\cdots\cdots+10)\pi=\frac{1}{2}\times 18.02\times 100\pi=901\pi\approx 2831$ cm

故選(3)。

二、多選題

7. (1)(2)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：化簡多項式並求值

解析：$f(1)=2$，$f(0)=1$，$f(-1)=2=f(1)$

化簡 $f(x)=-\frac{1}{3}(x-2)(x-3)(x-4)+\frac{5}{2}(x-1)(x-3)(x-4)-5(x-1)(x-2)(x-4)+\frac{17}{6}(x-1)(x-2)(x-3)$

$=x^2+1$

$\Rightarrow f(i)=f(-i)$ 且 $f(x)$ 為二次多項式函數

故選(1)(2)。

8. (1)(3)(5)

難易度：難

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式除法原理與因式分解

解析：由多項式除法原理

可令 $f(x)=x^{2n}(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^{2n}(x-3)$……………①

$x=3$ 代入①得 $f(3)=3^{2n}(9+3a+b)=0$

$\therefore$(1) ○

又 $\because 3^{2n}\neq 0$　$\therefore 9+3a+b=0\Rightarrow b=-3a-9$……………………②

②代回①改寫 $f(x)$ 為

$x^{2n}(x-3)(x+a+3)=(x-3)^2Q(x)+3^{2n}(x-3)$

$\Rightarrow x^{2n}(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^{2n}$

令 $x=3$ 代入得 $3^{2n}(a+6)=3^{2n}$

$\therefore a+6=1\Rightarrow a=-5$ 代回②解得 $b=6$

$\therefore$(2) ╳，(3) ○

又 $f(x)=x^{2n}(x-3)(x-2)$

$\therefore f(x)=0$ 恰有 $2n+2$ 個實根(有 $2n$ 個重根為 0，另兩根為 2，3)

$\therefore$(4) ╳，(5) ○

故選(1)(3)(5)。

9. (1)(4)(5)

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：了解指數函數的平移

解析：(1) ○：將 $y=2^x$ 向右平移 a 單位，再向上平移 b 單位，與 $y=2^x$ 必有一個交點

(2) ╳：將 $y=2^x$ 向右平移 a 單位，再向下平移 b 單位，與 $y=2^x$ 不相交

(3) ╳：將 $y=2^x$ 向左平移 a 單位，再向上平移 b 單位，與 $y=2^x$ 不相交

(4) ○：將 $y=2^x$ 向左平移 a 單位，再向下平移 b 單位，與 $y=2^x$ 必有一個交點

(5) ○：方程式 $2^{x-a}+b=2^x$ 若有解，則 $x=\log_2\dfrac{b}{1-2^{-a}}$ 為唯一解

故選(1)(4)(5)。

10. (1)(3)

難易度：中

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：了解數列與級數的關係

解析：由 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+na_n=n^2+3n+1$……………………………①

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-1)^2+3(n-1)+1=n^2+n-1$……………②

①－②得 $na_n=2n+2$ 可得

$$\begin{cases} a_1=1^2+3\times1+1=5 \\ a_n=\dfrac{2n+2}{n}=\dfrac{2(n+1)}{n}=2+\dfrac{2}{n}，n\geq 2 \end{cases}$$

(1) ○：此數列的每一項都是正數

(2) ╳：$\because a_n=2+\dfrac{2}{n}$

若 n 變大則 $\dfrac{2}{n}$ 變小　$\therefore a_n$ 變小

(3) ○：此數列的每一項都大於 2

(4) ╳：此數列為整數的項只有 a_1，a_2 兩項

(5) ╳：$a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\cdots\times a_n=5\times\dfrac{2\times3}{2}\times\dfrac{2\times4}{3}\times\dfrac{2\times5}{4}\times\cdots\cdots\times\dfrac{2(n+1)}{n}$

$=5\times2^{n-1}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{5}{4}\times\cdots\cdots\times\dfrac{n+1}{n}$

$=5(n+1)\cdot2^{n-2}$ 不為定值

故選(1)(3)。

11. (1)(2)(3)(5)

難易度：中

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：一維數據分析

解析：7 個數的中位數為 12，當 7 個整數由小到大排成一列時，12 應是排序第四，10 是唯一的眾數，

故排序第一～三個中，至少有兩個為 10

當此 7 個整數全距發生在最小值時，

此 7 個整數由小到大排成一列依序應為 10，10，10，12，12，13，13 一種情形，全距為 3，

此時 7 個數的平均值為 $\frac{80}{7}$＜中位數 12

將原始數據每項均減 10，得 0，0，0，2，2，3，3，此時 7 個新數據的平均值為 $\frac{10}{7}$

標準差為 $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}-\mu_x^2}=\sqrt{\frac{26}{7}-\left(\frac{10}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{82}}{7}\approx 1.29<2$

故選(1)(2)(3)(5)。

12. (2)(5)

難易度：中

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：明白迴歸直線的意義與二次函數最小值發生之處

解析：(1) ╳：$\mu_x=\frac{1800}{30}=60$，$\mu_y=\frac{2100}{30}=70$

$\because$ 迴歸直線必過點 (μ_x, μ_y)　$\therefore$ 迴歸直線的斜率為 $\frac{70-40}{60-20}=\frac{3}{4}$

(2) ○：迴歸直線的斜率 $0.9\times\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{5}{6}$　$\therefore x$ 的標準差大於 y 的標準差

(3) ╳：由(1)、(2)得知迴歸直線為 $y-70=\frac{3}{4}(x-60)$，但 $(30, 50)$ 不在迴歸直線上

(4) ╳：$\because u_i=4x_i+6$，$v_i=-6y_i+20$　$\therefore u$ 與 v 的相關係數為 -0.9

(5) ○：函數 $f(x)=\sum_{i=1}^{30}(x-x_i)^2$ 在 $x=\mu_x$ 時會發生最小值

故選(2)(5)。

13. (2)(3)

難易度：中

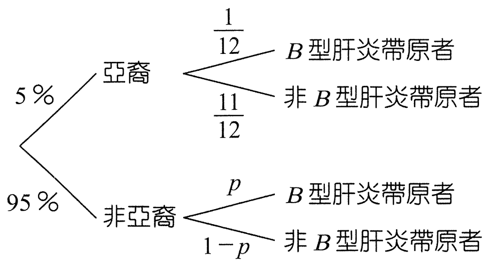
出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：資料判讀與貝氏定理的應用

解析：(1) ╳：資料中未提及肝癌患者人數，故亞裔的肝癌患者人數與非亞裔的肝癌患者人數無法比較

(2) ○：資料中提及全美國 B 型肝炎帶原者中亞裔就占 50 %，故亞裔的 B 型肝炎帶原者人數與非亞裔的 B 型肝炎帶原者人數相當

(3) ○：令非亞裔 B 型肝炎帶原者之比率為 p



$\Rightarrow \frac{5}{100}\times\frac{1}{12}=\frac{95}{100}\times p$

$\Rightarrow p=\frac{1}{12\times 19}=\frac{1}{228}$

亞裔 B 型肝炎帶原者之比率為非亞裔 B 型肝炎帶原者之比率的 19 倍

(4) ╳：承(3)，$p=\dfrac{1}{12\times 19}=\dfrac{1}{228}<5\%$

∴非亞裔為 B 型肝炎帶原者的機率低於 5 %

(5) ╳：$\dfrac{\frac{5}{100}\times\frac{11}{12}}{\frac{5}{100}\times\frac{11}{12}+\frac{95}{100}\times\frac{227}{228}}\approx 0.046<50\%$

故選(2)(3)。

第貳部分：選填題

A. 16

難易度：易

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：加法原理與乘法原理

解析：甲、乙同班只有可能同分至 B 班或 C 班，

(1) 若甲、乙同分至 B 班，其餘 4 人選 1 人分至 A 班，故有 $C_1^4\times 1=4$ 種情形

(2) 若甲、乙同分至 C 班，其餘 4 人選 1 人與甲、乙同班，剩下的 3 人選 1 人分至 A 班，故有 $C_1^4\times C_1^3=12$ 種情形

因此共有 16 種分法。

B. 100

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：連結生活中的情境與指數律

解析：依圖中所給定的數據代入方程式，得

$$\begin{cases} A+k=66 \cdots\cdots ① \\ 2^{20\alpha}\cdot A+k=34 \cdots\cdots ② \\ 2^{40\alpha}\cdot A+k=18 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②－①得 $(2^{20\alpha}-1)A=-32$ ⋯⋯④

③－②得 $(2^{40\alpha}-2^{20\alpha})A=-16$ ⋯⋯⑤

$\dfrac{⑤}{④}$得 $\dfrac{2^{40\alpha}-2^{20\alpha}}{2^{20\alpha}-1}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{2^{20\alpha}(2^{20\alpha}-1)}{2^{20\alpha}-1}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2^{20\alpha}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 20\alpha=-1\Rightarrow\alpha=-\dfrac{1}{20}$

代回①、②得 $A=64$，$k=2$，因此 $T(t)=64\cdot 2^{\frac{-t}{20}}+2$

依題意，$64\cdot 2^{\frac{-t}{20}}+2\le 4\Rightarrow 64\cdot 2^{\frac{-t}{20}}\le 2\Rightarrow 2^{\frac{-t}{20}}\le\dfrac{1}{32}=2^{-5}\Rightarrow t\ge 100$

故需時 100 分鐘。

C. 2048

難易度：易

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：一一對應原理

解析：12 可看成 $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$

11 個＋號可以有「選」與「不選」兩種方法

12 的不同的相加方式有 $2^{11}=2048$ 種方法。

D. 284

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數的基本定義

解析：$x=1$，2 時，$[\log_3 x]=0$

$x=3\sim 8$ 時，$[\log_3 x]=1$

$x=9\sim 26$ 時，$[\log_3 x]=2$

$x=27\sim 80$ 時，$[\log_3 x]=3$

$x=81\sim 100$ 時，$[\log_3 x]=4$

$\sum_{x=1}^{100}[\log_3 x]=6\times 1+18\times 2+54\times 3+20\times 4=284$。

E. 3

難易度：中

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：乘法公式的運用與根式的運算

解析：由乘法公式 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ 得知

$(a+b)^3=(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})^3+(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})^3+3\times\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\times\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\times(a+b)$

令 $a+b=t$，t 為實數

則上式為 $t^3=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})+3\times(-1)\times t\Rightarrow t^3+3t-4=0\Rightarrow(t-1)(t^2+t+4)=0$

解得實數 $t=1$，即 $a+b=1$

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1^2-2\times\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\times\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

$=1-2\times(-1)=1+2=3$。

F. -1

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：了解多項式除法原理與多項式恆等定理以及根與係數的關係

解析：假設 $f(x)=2(x-a)(x-b)(x-c)+R(x)$，其中 $\deg R(x)\leq 2$，又 $g(a)=g(b)=g(c)=3$

$\because f(a)=g(a)=R(a)$，$f(b)=g(b)=R(b)$，$f(c)=g(c)=R(c)$，

根據多項式恆等定理得知 $R(x)=g(x)=3$

$\therefore f(x)=2x^3-2017x^2-106x+5=2(x-a)(x-b)(x-c)+3$

比較係數後得到 $-2abc+3=5\Rightarrow abc=-1$。

G. $\frac{7}{30}$

難易度：難

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：利用窮舉的方式解決機率問題

解析：得到超過 310 元的方法有：

第一次抽到 1000 元或 500 元的籤，以及抽到銘謝惠顧後，最後抽到 1000 元的籤

所以第一次抽到 1000 元籤的機率為 $\frac{1}{15}$，第一次抽到 500 元籤的機率為 $\frac{2}{15}$，

而抽到銘謝惠顧後，最後抽到 1000 元籤的機率為

$\frac{5}{15}\times\frac{1}{14}+\frac{5}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{1}{13}+\frac{5}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{3}{13}\times\frac{1}{12}+\frac{5}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{3}{13}\times\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}$

$+\frac{5}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{3}{13}\times\frac{2}{12}\times\frac{1}{11}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{30}$

$\therefore$阿明獲得獎金超過 310 元的機率為 $\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{1}{30}=\frac{7}{30}$。