臺北區 104 學年度第一學期
第二次學科能力測驗模擬考試

數學考科

—作答注意事項—

考試範圍：第一～三冊全

考試時間：100 分鐘

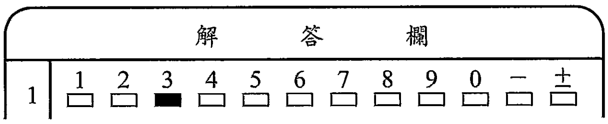
題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A. 至 G. 題共 7 題。

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答，更正時應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶(液)。
未依規定畫記答案卡，使機器無法辨識答案者，其後果考生自行承擔。

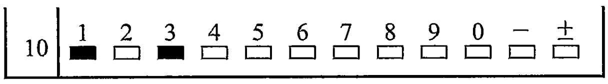
作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

（一） 填答選擇題時，只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到－，±，以及 6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1) 3 (2) 5 (3) 7 (4) 9 (5) 11，而考生得到的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 3 畫記（注意不是 7），如：

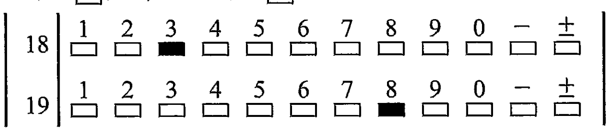


例：若多選題第 10 題考生認為正確的選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡第 10 列的 1 與 3 畫記，如：

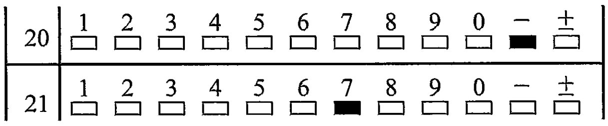


（二） 選填題的題號是 A.，B.，C.，…，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。

例：若第 B. 題的答案格式是 $\frac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：



例：若第 C. 題的答案格式是 $\frac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\frac{-7}{50}$，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 － 與第 21 列的 7 畫記，如：



※試題後附有可能用到的參考公式及數值。

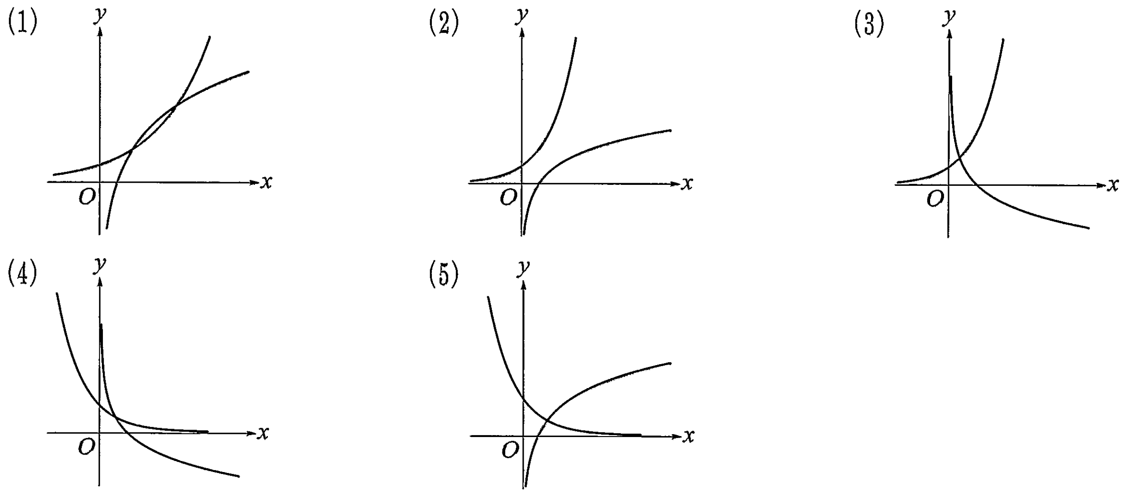
第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

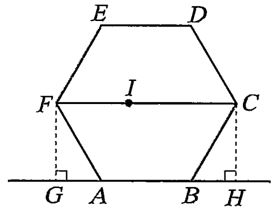
說明：第 1. 題至第 6. 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是最適當的選項，畫記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分；未作答、答錯或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. MLB 美國職棒大聯盟的亞裔投手中，擁有生涯最多勝投者為已退役的南韓 朴贊浩，勝投數為 124 場。臺灣殷雄陳偉殷在 MLB 的前三年(2012～2014 年球季)已累積先發 86 場，並奪下 35 勝。假設殷仔身體一直健康無虞，且每年固定先發 30 場，若保持前三年的奪勝率，請問他在哪一年球季會成為新的亞洲勝投王？
   (1) 2021 年
   (2) 2022 年
   (3) 2023 年
   (4) 2024 年
   (5) 2025 年

2. 請問下列哪一個選項可以表示 $y=(\sqrt{2})^x$ 和 $y=\log_{\sqrt{2}} x$ 的圖形？



3. 如右圖，$ABCDEF$ 為邊長 5 的正六邊形，C、F 在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上的投影點分別為 H、G。若 I 在 $\overline{FC}$ 上且 $\overline{FI}:\overline{IC}=2:3$，則 $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{GH}=$？
   (1) 10
   (2) $10\sqrt{3}$
   (3) 15
   (4) 18
   (5) 24



4. 三筆數值資料 X，Y，Z 如下表所示：

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	-6	2	10	18	26	34	42	50	58
Z	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1

假設 X 與 Y 的相關係數為 r_1、Y 與 Z 的相關係數為 r_2、Z 與 X 的相關係數為 r_3，請選出正確的選項。

(1) $r_1<1$

(2) $r_3=-1$

(3) $r_1=r_3$

(4) $r_1<r_2$

(5) $r_3<0$

5. $\langle a_n \rangle$ 為一正整數數列，設前 n 項總和為 S_n。若對所有的正整數 n， a_n 與 2 的等差中項等於 S_n 與 2 的等比中項，請問下列哪一個選項等於 a_{2015}？

(1) 3057

(2) 4015

(3) 4098

(4) 6062

(5) 8058

6. 坐標平面上，O 為原點，兩定點 $A(2,3)$，$B(-2,1)$。若 $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，其中 $0\le s\le 2$、$0\le t\le 2$、$s-t\le 1$，請問下列哪一個選項可能為 P 點的坐標？

(1) $(-3,4)$

(2) $(3,5)$

(3) $(-1,7)$

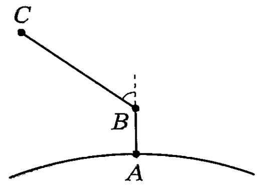
(4) $(1,7)$

(5) $(2,8)$

二、多選題（占 35 分）

說明：第 7. 題至第 13. 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的，選出正確選項畫記在答案卡之「解答欄」。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

7. 如右圖，某船由岸邊一點 A 往前航行 10 公里後到達 B 點，再逆時針轉向一個介於 45° 至 60° 的角度後，筆直航行 30 公里到達 C 點。請問下列何者可能為 $\overline{AC}^2$ 的值？



(1) 1350
(2) 1400
(3) 1450
(4) 1500
(5) 1550

8. 設 A、B 為兩事件，且滿足 $P(A \mid B)=\dfrac{2}{3}$，$P(B')=\dfrac{1}{4}$，$P(A-B)=\dfrac{1}{6}$。請選出正確的選項？

(1) $P(A)=\dfrac{11}{12}$
(2) $P(B \mid A)=\dfrac{1}{3}$
(3) $P(A \cup B)=\dfrac{11}{12}$
(4) $P(A' \cap B)=\dfrac{1}{4}$
(5) $P(B-A)=\dfrac{5}{6}$

9. 已知三次實係數多項式 $f(x)$ 滿足 $f(103)=4$，$f(104)=-3$，$f(105)=2$；二次實係數多項式 $g(x)$ 滿足 $g(103)=4$，$g(104)=-3$，$g(105)=2$。請選出正確的選項。

(1) $f(x)=4\cdot\dfrac{(x-104)(x-105)}{2}+(-3)\cdot\dfrac{(x-103)(x-105)}{1}+2\cdot\dfrac{(x-103)(x-104)}{2}$
(2) $g(106)=1$
(3) $f(x)$ 除以 $(x-103)(x-104)(x-105)$ 的餘式為 $g(x)$
(4) 若 $f(106)=-5$，則 $f(x)=-4(x-103)(x-104)(x-105)+g(x)$
(5) 若 $f(106)=-5$，則方程式 $f(x^2)=0$ 恰有六個相異實根

10. 請問下列哪些選項的 a 值可使絕對值不等式 $|ax+1|\le 4$ 的解集合為 $\{x \mid b\le x\le c$，其中 b 為實數、c 為整數$\}$？

(1) $a=2$

(2) $a=3$

(3) $a=0.1$

(4) $a=0.\overline{27}$

(5) $a=-\dfrac{5}{2}$

11. 設三個方程式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=x^2$ 和 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=x^3$ 和 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=x^4$ 的正實根分別為 α、β、γ。請選出正確的選項。

(1) $\alpha<\beta<\gamma$

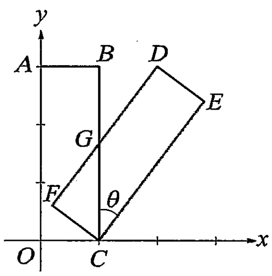
(2) $\alpha>\beta>\gamma$

(3) $\alpha>\dfrac{1}{2}$

(4) $\alpha<\dfrac{1}{2}$

(5) $\alpha\beta\gamma<1$

12. 坐標平面上一矩形 $OABC$，如圖所示，O 為原點，$\overline{OC}$ 在 x 軸上，$\overline{OA}=3$，$\overline{OC}=1$。將矩形 $OABC$ 以 C 為旋轉中心，順時針旋轉 θ 角成為矩形 $FDEC$，$0^\circ<\theta<90^\circ$，並使得 D 點落在直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上。請選出正確的選項。



(1) $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$

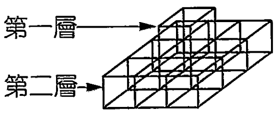
(2)直線 $\overleftrightarrow{DF}$ 通過原點 O

(3)直線 $\overleftrightarrow{CF}$ 方程式為 $3x+4y=3$

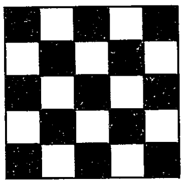
(4) F 點坐標為 $\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{5}\right)$

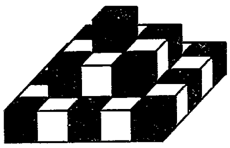
(5)若 G 點為 $\overline{BC}$ 與 $\overline{DF}$ 的交點，則$\triangle CFG$ 的面積為 $\dfrac{2}{3}$.

13. 某日，昊廷要做一個金字塔造型的展示臺來擺放他蒐集多年的神奇寶貝公仔。他準備了足夠多的：長度 2 公分的小木棒，還有黑、白兩色，邊長 2 公分的正方形壓克力板。他先依 1，3，5，……，19 根木棒的寬度，總共做了十層骨架，圖(一)為完成最上面兩層時的樣子，正立方體每一邊皆是一根小木棒。然後他把骨架表面(含第十層底面、但不含中空部分)黏上壓克力板，並希望從任何角度看都呈現黑白相間的效果。圖(二)為最上方三層的俯視圖、圖(三)為最上方三層的側面圖。若壓克力板完全密合，且不計厚度。請選出正確的選項。



圖(一)


圖(二)


圖(三)

(1)昊廷將所有公仔擺放在面朝上的黑色壓克力板上，發現一格擺一個剛好擺完，則他有 180 個公仔
(2)展示臺的表面積(含底面)為 4488 平方公分
(3)共需要 540 片白色壓克力板
(4)共需要 562 片黑色壓克力板
(5)共需要 4400 根小木棒

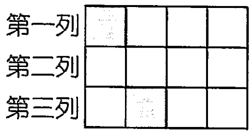
第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1. 第 A. 至 G. 題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（14－34）。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。
3. 附圖均僅供參考，不代表實際大小。

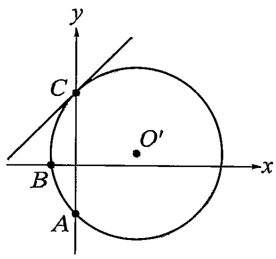
A. 某日，媽媽帶小昀來到新開幕的兒童新樂園玩，並約定花費不得超過 60 元。小昀決定今天只玩奇幻森林與夢想海這一區，簡介上標明本區的遊樂設施、收費標準如右表所示。已知小昀回家前至少玩了一次遊樂設施，且可以重複玩同一種，則過程中小昀共有 ⑭⑮ 種不同的玩法。

遊樂設施	單次票價
叢林吼吼樹屋(自由落體)	30 元
飛天神奇號(飛天巴士)	20 元
海洋總動員(旋轉木馬)	20 元
尋寶船(海盜船)	30 元
水果摩天輪	30 元

B. 如右圖，將 4 顆紅球、4 顆藍球、2 顆白球全部放入棋盤的 12 個格子內，且每格最多放一顆球。則已知灰色格子內沒球的情況下，第一列沒紅球且第二列沒藍球且第三列沒白球的條件機率為 $\dfrac{⑯⑰}{⑱⑲⑳㉑}$。(化為最簡分數)

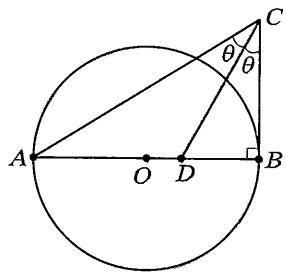


C. 如右圖，一圓通過相異三點 $A(0\,,\ -2)$、$B(-1\,,0)$、$C(0\,,k)$，已知此圓在 C 點之切線斜率為 1，則圓心 O' 坐標為 $\left(\dfrac{㉒}{㉓},\dfrac{㉔}{㉕}\right)$。(化為最簡分數)

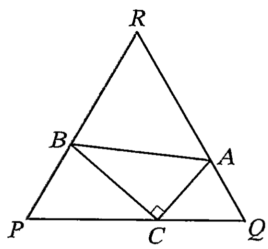


D. 有一筆數值資料：「14，6，6，9，6，8，x」，計算此 7 個數字的算術平均數為 a、中位數為 b、眾數為 c。若 a，b，c 三數經重新排列後可為公差為正數的等差數列，則所有可能的 x 值之總和為＿㉖㉗＿。

E. 如右圖，一單位圓以 $\overline{AB}$ 為直徑，O 為圓心，且 $\angle ABC=90^\circ$。若 $\angle ACD=\angle BCD=\theta$ 且 $\sin\theta=\dfrac{1}{5}$，則 $\overline{OD}=\dfrac{㉘}{㉙㉚}$。(化為最簡分數)



F. 如右圖，$\triangle PQR$ 為正三角形，A，B，C 分別落在 $\overline{QR}$，$\overline{PR}$，$\overline{PQ}$ 邊上，且 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$。若 $\overline{AQ}=8$，$\overline{PB}=\overline{CQ}=10$，則 $\overline{PC}$ ＝＿㉛㉜＿。



G. 甲地失業率居高不下，為了鼓勵民眾勇於創業，提出了貸款年利率 1.5 %，每年複利一次的優惠方案；乙地經濟過熱，為了鼓勵民眾將錢存進銀行，提出了存款年利率 3.53 %，每年複利一次的優惠方案。爸爸突發奇想，從甲地銀行貸款 100 萬後，留下其中的 20 萬自用，並馬上將剩下的 80 萬存入乙地銀行，則最少＿㉝㉞＿年之後，爸爸存於乙地銀行的本利和能一次還清在甲地銀行積欠的貸款。(取整數，$\log 1.02\approx 0.0086$)

可能用到的參考公式及數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S_n=\dfrac{n[2a+(n-1)d]}{2}$；

   首項為 a，公比為 $r(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$
2. 複利公式：若本金 P、利率 r、期數 n，則 n 期後本利和為 $P(1+r)^n$
3. 級數公式：$\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$\sum_{k=1}^{n} k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$
4. 和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$
5. 倍角公式：$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$、$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$
6. $\triangle ABC$ 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

   $\triangle ABC$ 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
7. 一維數據 X：x_1，x_2，……，x_n，算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-n\mu_X^2\right]}$
8. 二維數據 (X,Y)：(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)，相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$
9. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$
10. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$

臺北區 104 學年度第一學期
第二次學科能力測驗模擬考試

數學考科參考答案暨詳解

104-B2

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(2)	(1)	(3)	(3)	(5)	(4)	(1)(2)	(3)(4)	(3)(4)(5)
題號	10.	11.	12.	13.					
答案	(2)(3)(4)(5)	(1)(3)(5)	(1)(3)(4)(5)	(2)(3)					

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (2)

難易度：易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：一次不等式的求解

解析：設需要 n 年，

依題意得：$30n\times\frac{35}{86}>124-35\Rightarrow n>7.2\cdots$

∴再 8 年，即 2022 年球季

故選(2)。

2. (1)

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指對數函數圖形的判斷

解析：$(2,2)$ 和 $(4,4)$ 均為兩個函數圖形上的點，

故圖形必交於相異兩點，故選(1)。

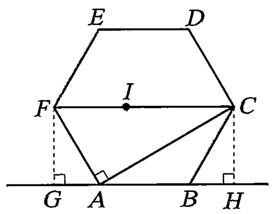
3. (3)

難易度：中

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量的分點公式與向量內積運算

解析：連接 $\overrightarrow{AC}$，由分點公式知 $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AF}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$



$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{GH}=\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AF}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{GH}$$

$$=\frac{3}{5}\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{GH}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{GH}$$

$$=\frac{3}{5}|\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{GH}|\cos 120^\circ+\frac{2}{5}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{GH}|\cos 30^\circ$$

$$=\frac{3}{5}\times5\times10\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{5}\times5\sqrt{3}\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15$$

故選(3)。

4. (3)

難易度：易

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：相關係數的運算，完全相關的判斷

解析：由資料的規律性發現：

X、Y 滿足 $Y=8X-14\Rightarrow r_1=1$

Y、Z 滿足 $Y=8Z+66\Rightarrow r_2=1$

X、Z 滿足 $Z=X-10\Rightarrow r_3=1$

故選(3)。

5. (5)

難易度：中

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：等差中項與等比中項的應用

解析：$\because a_n>0 \quad \therefore \dfrac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n}$，則

$$n=1：\frac{a_1+2}{2}=\sqrt{2S_1}=\sqrt{2a_1} \Rightarrow a_1=2$$

$$n=2：\frac{a_2+2}{2}=\sqrt{2S_2}=\sqrt{2(2+a_2)} \Rightarrow a_2=6$$

$$n=3：\frac{a_3+2}{2}=\sqrt{2S_3}=\sqrt{2(2+6+a_3)} \Rightarrow a_3=10$$

$$n=4：\frac{a_4+2}{2}=\sqrt{2S_4}=\sqrt{2(2+6+10+a_4)} \Rightarrow a_4=14$$

$\vdots$

推測〈a_n〉可能為首項 2、公差 4 的等差數列

故 $a_{2015}=2+2014\times4=8058$

驗證如下：

$$\frac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n} \Rightarrow (a_n+2)^2=8S_n$$

$$\frac{a_{n-1}+2}{2}=\sqrt{2S_{n-1}} \Rightarrow (a_{n-1}+2)^2=8S_{n-1}$$

$\Rightarrow (a_n+2)^2-(a_{n-1}+2)^2=8(S_n-S_{n-1})=8a_n$

$\Rightarrow (a_n-2)^2=(a_{n-1}+2)^2$

$\Rightarrow a_n=a_{n-1}+4$ 或 $a_n=-a_{n-1}$ (不合)

故〈a_n〉為首項 2、公差 4 的等差數列

故選(5)。

6. (4)

難易度：難

出處：第三冊第二章〈圓與直線〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：二元一次聯立不等式的解與平面向量的坐標表示

解析：設 $P(x,y)$，則 $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$

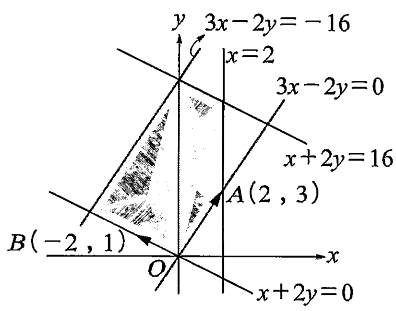
$\Rightarrow (x,y)=s(2,3)+t(-2,1)$

解得 $\begin{cases} s=\dfrac{1}{8}(x+2y) \\ t=-\dfrac{1}{8}(3x-2y) \end{cases}$

代入 s，t 條件，得 (x,y) 滿足

$$\begin{cases} 0\le x+2y\le16 \\ -16\le 3x-2y\le0 \\ x\le2 \end{cases}$$

逐一檢驗只有 $(1,7)$ 符合，故選(4)。



二、多選題

7. (1)(2)

難易度：易

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：餘弦定理的應用

解析：由題意易知 $\overline{AC}$ 最短發生在轉向 60° 時，$\overline{AC}$ 最長發生在轉向 45° 時

此時 $\angle ABC$ 分別等於 120° 及 135°

又 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}^2=10^2+30^2-2\times10\times30\times\cos\angle ABC$

求出 $\overline{AC}^2$ 最短為 1300，最長為 $1000+300\sqrt{2}\approx1420$

故選(1)(2)。

8. (3)(4)

難易度：中

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：基本機率的運算

解析：$P(B)=1-P(B')=\frac{3}{4}$，$P(A\cap B)=P(B)P(A\mid B)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$

(1) ╳：$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

(2) ╳：$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}$

(3) ○：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{11}{12}$

(4) ○：$P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

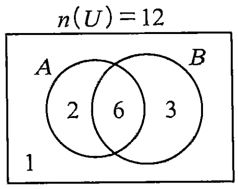
(5) ╳：$P(B-A)=P(A'\cap B)=\frac{1}{4}$

故選(3)(4)。

〈另解〉

取 $n(U)=12$，可得文氏圖如右圖

依圖中比例可得解為(3)(4)。



9. (3)(4)(5)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：拉格朗日插值法、除法原理、餘式定理及勘根定理的應用

解析：(1) ╳：$\deg f(x)=3$

(2) ╳：根據拉格朗日插值法：

$$g(x)=4\cdot\frac{(x-104)(x-105)}{2}+(-3)\cdot\frac{(x-103)(x-105)}{-1}+2\cdot\frac{(x-103)(x-104)}{2}$$

$\therefore g(106)=19$

(3) ○：根據除法原理 $f(x)=a(x-103)(x-104)(x-105)+r(x)$，其中 $\deg r(x)\leq 2$

又 $f(103)=r(103)=g(103)=4$，$f(104)=r(104)=g(104)=-3$，$f(105)=r(105)=g(105)=2$

$\therefore g(x)=r(x)$

(4) ○：設 $f(x)=a(x-103)(x-104)(x-105)+g(x)$，又 $g(106)=19$

則 $f(106)=a(106-103)(106-104)(106-105)+g(106)=-5$，得 $a=-4$

$\therefore f(x)=-4(x-103)(x-104)(x-105)+g(x)$

(5) ○：根據勘根定理 $f(103)=4$，$f(104)=-3$，$f(105)=2$，$f(106)=-5$

$f(t)=0$ 有三個相異正實根

令 $t=x^2$，因此方程式 $f(x^2)=0$ 恰有六個相異實根

故選(3)(4)(5)。

10. (2)(3)(4)(5)

難易度：易

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：集合表示法、絕對值不等式的計算

解析：$|ax+1|\leq 4\Rightarrow -4\leq ax+1\leq 4\Rightarrow -5\leq ax\leq 3$，又 $0.\overline{27}=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}$

①當 $a>0$ 時：$-\frac{5}{a}\leq x\leq\frac{3}{a}$，檢驗得(2)(3)(4)合

②當 $a<0$ 時：$\frac{3}{a}\leq x\leq -\frac{5}{a}$，檢驗得(5)合

故選(2)(3)(4)(5)。

11. (1)(3)(5)

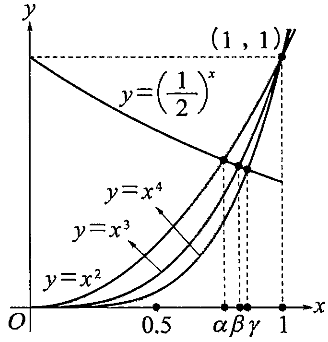
難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指對數函數的圖形、多項式函數圖形、勘根定理的應用

解析：$\because 0<a<1$ 時，$a^2>a^3>a^4$ 恆成立

$\therefore$ 可在坐標平面上畫出 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$、$y=x^2$、$y=x^3$、$y=x^4$ 的四個圖形如右：



由圖可知，$\alpha<\beta<\gamma$ 且 $\alpha>\frac{1}{2}$ 且 $\alpha\beta\gamma<1$

故選(1)(3)(5)

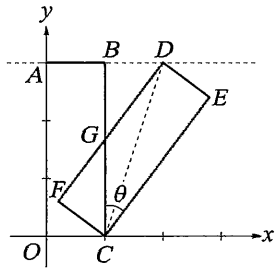
12. (1)(3)(4)(5)

難易度：難

出處：第三冊第一章〈三角〉、第三冊第二章〈圓與直線〉

目標：差角、倍角公式與直線方程式的應用

解析：$\overline{CD}=\overline{OB}=\sqrt{10}$ 且 $\overline{BC}=3 \Rightarrow \overline{BD}=1$



$\therefore \triangle CBD \cong \triangle CED$ 且 $\angle BCD=\frac{\theta}{2}$

(1)○：$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\times\frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3}{5}$

(2)×：直線 $\overleftrightarrow{DF}$ 斜率為 $\tan(90^\circ-\theta)=\frac{4}{3}$，又 $D(2,3)$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{DF}$：$4x-3y=-1$

$\therefore \overleftrightarrow{DF}$ 不通過原點 O

(3)○：$\overleftrightarrow{CF}\perp\overleftrightarrow{DF}$ 又 $C(1,0) \Rightarrow \overleftrightarrow{CF}$：$3x+4y=3$

(4)○：$\angle OCF=\theta$ 且 $\overline{CF}=1 \Rightarrow F(1-\cos\theta, \sin\theta) \Rightarrow F\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$

(5)○：$\triangle CFG$ 面積$=\frac{1}{2}\times\overline{CF}\times\overline{FG}=\frac{1}{2}\times1\times\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$

故選(1)(3)(4)(5)。

13. (2)(3)

難易度：難

出處：第二冊第一章〈數列與級數〉

目標：等差級數、Σ 公式應用

解析：(1)×：黑色比白色多一片，又第十層每邊有 19 片

故朝上黑色板有 $\frac{19\times19-1}{2}+1=181$(片)　$\therefore$ 有 181 個公仔

(2)○：總面積$=[4\times(1+3+5+\cdots\cdots+19)+2\times19^2]\times2^2=4488$(平方公分)

(3)○：白色板$=4\times(1+2+3+\cdots\cdots+9)+2\times180=540$(片)

(4)×：黑色板$=4\times(1+2+3+\cdots\cdots+10)+2\times181=582$(片)

(5)×：分三個方向討論(— 和 ／ 一樣多)

｜：$2\times2+4\times4+\cdots\cdots+20\times20=\sum_{n=1}^{10}(2n)^2=4\sum_{n=1}^{10}n^2=\frac{4\times10\times11\times21}{6}=1540$

— 和 ／：$2(1\times2+3\times4+5\times6+\cdots\cdots+19\times20+19\times20)$

$=2\sum_{n=1}^{10}(2n-1)(2n)+760$

$=8\sum_{n=1}^{10}n^2-4\sum_{n=1}^{10}n+760=\frac{8\times10\times11\times21}{6}-\frac{4\times10\times11}{2}+760=3620$

$\therefore$ 共需 $1540+3620=5160$(根)

故選(2)(3)。

第貳部分：選填題

A. 38

難易度：易

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：排列、重複排列

解析：依玩的次數分類討論：

玩 1 次：$C_1^5=5$；玩 2 次：$5^2=25$；玩 3 次：$2^3=8$

$\therefore$共 $5+25+8=38$ 種玩法。

B. $\dfrac{19}{1050}$

難易度：中

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉、第二冊第三章〈機率〉

目標：有相同物的排列、條件機率

解析：第一列依 3 藍、2 藍 1 白、1 藍 2 白等三種情況討論：

① 3 藍：第二列必 2 白 2 紅、第三列必 1 藍 2 紅，方法數為 $1\times\dfrac{4!}{2!\times2!}\times\dfrac{3!}{2!}=18$

② 2 藍 1 白：第二列必 1 白 3 紅、第三列必 2 藍 1 紅，方法數為 $\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{4!}{3!}\times\dfrac{3!}{2!}=36$

③ 1 藍 2 白：第二列必 4 紅，第三列必 3 藍，方法數為 $\dfrac{3!}{2!}\times1\times1=3$

故所求條件機率 $p=\dfrac{18+36+3}{\dfrac{10!}{4!4!2!}}=\dfrac{57}{3150}=\dfrac{19}{1050}$。

C. $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：直線與圓的關係及幾何性質

解析：令圓心坐標 $O'(x,y)$

$\because$圓與 y 軸交 $A(0,-2)$，$C(0,k)\Rightarrow y=\dfrac{-2+k}{2}$

又 $\overline{AB}$ 的垂直平分線：$2x-4y=3$，將 $y=\dfrac{-2+k}{2}$ 代入 $\Rightarrow x=\dfrac{2k-1}{2}$

再由過 C 之切線斜率為 1，得知 $\overline{O'C}$ 斜率為 $-1\Rightarrow\dfrac{\dfrac{-2+k}{2}-k}{\dfrac{2k-1}{2}-0}=-1\Rightarrow k=3$，代回得 $O'\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}\right)$。

D. 28

難易度：中

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：未分組資料平均數、中位數的計算與大小判定

解析：依題意，$a=\dfrac{49+x}{7}$，$c=6$，則 x 值分段討論如下：

① $x\leq6$：『x，6，6，6，8，9，14』$\Rightarrow b=6$(不合)

② $6<x\leq8$：『6，6，6，x，8，9，14』$\Rightarrow b=x$ 且 $a=\dfrac{49+x}{7}>6$

等差數列兩種可能為 $\begin{cases}6,\ x,\ \dfrac{49+x}{7}\Rightarrow x=7\\ 6,\ \dfrac{49+x}{7},\ x\Rightarrow x=\dfrac{56}{5}\text{(不合)}\end{cases}$

③ $x>8$：以『6，6，6，8，x，9，14』為例 $\Rightarrow b=8$ 且 $a=\dfrac{49+x}{7}>8$

等差數列可能為 6，8，$\dfrac{49+x}{7}\Rightarrow x=21$

故所有可能 x 值之總和為 $7+21=28$。

E. $\frac{1}{24}$

難易度：中

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：角平分線定理與倍角公式的應用

解析：$\because \sin\theta=\frac{1}{5} \Rightarrow \cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=\frac{23}{25}$

在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^\circ$，$\overline{CD}$ 為角平分線

$\Rightarrow \overline{AD}:\overline{BD}=\overline{CA}:\overline{CB}=1:\cos 2\theta=25:23$

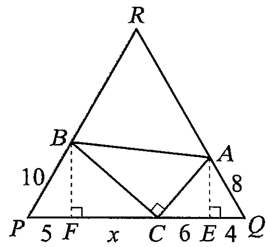
$\therefore \overline{AD}=2\times\frac{25}{25+23}=\frac{25}{24} \Rightarrow \overline{OD}=\frac{1}{24}$。

F. 15

難易度：中

出處：第三冊第三章〈平面向量〉或第三冊第一章〈三角〉

目標：向量的坐標表示法與內積運算或餘弦定理的應用



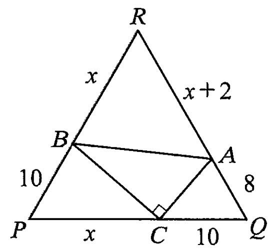
解析：如圖，取 $C(0,0)$，直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 為 x 軸

令 $\overline{CF}=x$，則 $A(6,4\sqrt{3})$，$B(-x,5\sqrt{3})$

$\because \overline{CA}\perp\overline{CB} \Rightarrow \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=-6x+60=0 \Rightarrow x=10$

$\therefore \overline{PC}=5+10=15$。

〈另解〉



如圖，設 $\overline{PC}=x$，則 $\overline{BR}=x$，$\overline{AR}=x+2$

$\because \overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$，且$\triangle PQR$為正三角形

$\therefore$利用餘弦定理得

$x^2+(x+2)^2-2x(x+2)\cos 60^\circ$

$=10^2+x^2-2\cdot 10x\cos 60^\circ+8^2+10^2-2\cdot 8\cdot 10\cos 60^\circ$

$\Rightarrow x=15$

故 $\overline{PC}=15$。

G. 12

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：利用對數解決複利的應用問題

解析：n 年後，從甲地銀行貸款的本利和$=100(1+1.5\,\%)^n$ (萬元)

在乙地銀行存款的本利和$=80(1+3.53\,\%)^n$ (萬元)

由題意知：$80(1+3.53\,\%)^n \geq 100(1+1.5\,\%)^n$

$\frac{(1+3.53\,\%)^n}{(1+1.5\,\%)^n} \geq \frac{5}{4} \Rightarrow \left(\frac{1.0353}{1.015}\right)^n \geq \frac{5}{4} \Rightarrow (1.02)^n \geq \frac{5}{4}$

$\Rightarrow n\cdot\log 1.02 \geq \log 5-\log 4 \Rightarrow n \geq \frac{0.097}{0.0086} \approx 11.2\cdots$，故最少 12 年之後。