# 詮達文教

## 2018 學力測驗模擬考試卷

# 數學考科

數學

### —作答注意事項—

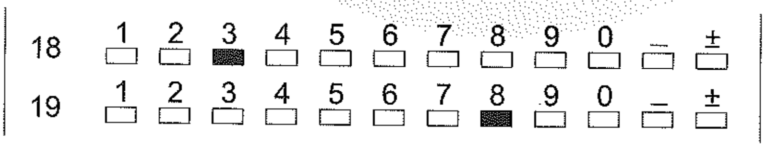
考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題。

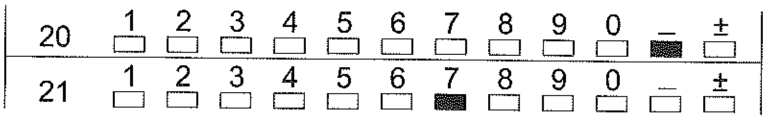
作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：




例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，考生必須分別在答案卡的第 20 列的 – 與第 21 列的 7 畫記，如：




※試題後附有參考公式及可能用到的數值

## 第壹部分：選擇題（占 65 分）

### 一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $k=\sqrt{2\times\sqrt{12+8\sqrt{2}}}$，若 $n<k<n+1$，其中 $n$ 為整數，試求 $n=$？（$\sqrt{2}\approx 1.414$）
   (1) 1
   (2) 2
   (3) 3
   (4) 4
   (5) 5

2. 若 $\langle a_n\rangle$ 是等差數列，首項 $a_1>0$，已知 $a_{2017}+a_{2018}<0$，且 $a_{2017}\cdot a_{2018}<0$，則使得前 $n$ 項和 $S_n>0$ 的最大自然數 $n$ 為？
   (1) 2017
   (2) 4033
   (3) 4034
   (4) 4035
   (5) 4036

3. 坐標平面上 $O$ 為原點，點 $A$ 與點 $B$ 對稱 $y$ 軸，若 $\overline{OA}$ 與 $x$ 軸正向夾角為 $\theta$，$\overline{OB}$ 與 $x$ 軸正向夾角為 $\phi$，若 $\sin\theta=\frac{1}{3}$，則 $\cos(\phi-\theta)=$？
   (1) $-\frac{7}{9}$
   (2) $-\frac{5}{9}$
   (3) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
   (4) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$
   (5) $\frac{1}{3}$

4. 圖 1 為正五邊形，已知直線$\overline{AB}$與$x$軸平行若線性規劃可行解區為五邊形內部（含邊界），則目標函數$P(x,y)=-x-y$的最大值發生於哪一點？
(1) A
(2) B
(3) C
(4) D
(5) E

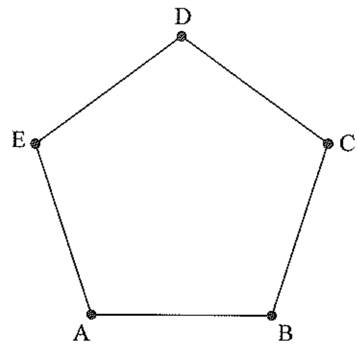


圖 1

5. 試從下列各個數值中，選出最大的選項
(1)$0.9$
(2)$0.9^{0.9}$
(3)$0.9^{0.9^{0.9}}$
(4)$0.9^{0.99}$
(5)$0.9^{0.9\times0.9}$

6. 設$\langle a_n\rangle$為等差數列，公差$d\neq0$，若取其前$k$項，計算這$k$個數字的標準差，下列敘述何者正確？
(1)當$k$越大，標準差越大
(2)當$k$越大，標準差越小
(3)當$|d|<1$時，則$k$越大，標準差就越大；當$|d|>1$時，則$k$越大，標準差越小
(4)當$|d|<1$時，則$k$越大，標準差就越小；當$|d|>1$時，則$k$越大，標準差越大
(5)$k$與$|d|$為定值時，標準差與公差$d$的正負有關

7. 對數函數的一個重要的應用為：將難以計算的數字，可以取對數後進行估計，試利用對數估計$2^{35}+3^{23}$為幾位數的整數？
(1) 10
(2) 11
(3) 12
(4) 21
(5) 22

二、多選題（占 30 分）

說明：第 8 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8. 設$f(x)=\dfrac{3x-3}{\sqrt[3]{(x+1)}\sqrt[3]{(x-2)^2}}$，則下列哪些選項的值大於 0？

(1)$f(-1.5)$

(2)$f(0)$

(3)$f(1.1)$

(4)$f(\log_2 5)$

(5)$f(\pi)$

9. 坐標平面上，$O$為原點，$A(2,3)$、$B(4,-6)$為平面上兩定點，設動點$P$以原點為起點，沿著方向向量$=(2,-1)$前進；動點$Q$同樣以原點為起點，沿著方向向量$=(2,0)$前進，若兩動點移動的速率相同並且同時出發，則下列哪些選項正確？

(1)當$P$點位於$(4,-2)$時，$Q$點恰移動到$(4,0)$

(2)動點$P$移動的路徑會經過$\Delta OAB$重心

(3)動點$Q$移動的路徑會經過$\Delta OAB$內心

(4)動點$P$會較動點$Q$先移動到$\overline{AB}$上

(5)設$P$經過$\overline{AB}$線段時，坐標為$(3,-\frac{3}{2})$

10. 已知$0.1<\sin\theta<0.2$且$90°<\theta<180°$，則下列哪些選項正確？

(1)$45°<\frac{\theta}{2}<75°$

(2)$0.8<|\cos\theta|<0.9$

(3)$-0.2<\tan\theta<-0.11$

(4)$0.92<\cos2\theta<0.98$

(5)$\cos\frac{\theta}{3}$可能小於 0

11. 小依想要更換新的手機合約，比照市面上三種吃到飽合約如下，
方案$A$：前 6 個月每月 399，第 7~24 個月每個月 699；
方案$B$：第一個月 699，之後每個月都比前一個月便宜 10 元；
方案$C$：每個月 749，一旦簽約 2 年即送價值 3000 元大禮；
假設將方案$A$、$B$、$C$每個月的花費視為 1 個數據點，即$A=a_1,a_2,\cdots,a_{24}$、$B=b_1,b_2,\cdots,b_{24}$、$C=c_1,c_2,\cdots,c_{24}$，考慮$A$、$B$、$C$數據的統計資料，禮品價值可視為現金，下列哪些選項正確？
(1)使用方案$C$最為划算
(2)使用方案$B$最為划算
(3)方案$B$的全距>方案$A$的全距
(4)方案$A$的中位數>方案$B$的中位數
(5)方案$A$的標準差較方案$B$的標準差高

12. 圖 2，坐標平面上$y=f(x)=2^{x+a}$與$y=g(x)=\log_2 x+b$的圖形交於兩點，其中一個交點坐標為$(1,1)$，則下列哪些選項正確？
(1) $a+b=0$
(2)另一個交點之$x$坐標亦為整數
(3)當$1<x<2$時，$f(x)<g(x)$
(4) $y=k$可能與$y=f(x)$，$y=g(x)$均無交點
(5)$y=px^2+qx+r$，$p\neq0$的圖形可能與$y=f(x)$、$y=g(x)$均無交點

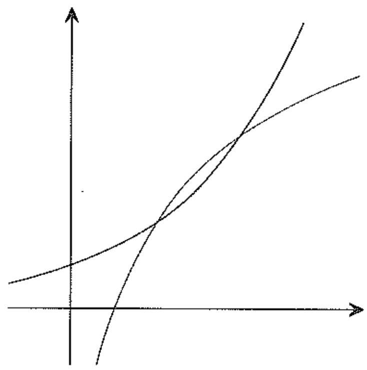


圖 2

13. 如圖 3，小歆欲從$A$點沿著線移動至$B$點，考慮下列兩種走法：
1.從所有走捷徑的路線中，隨機選取一種走法移動。
2.在每個交叉口均考慮向右或向上，選取向右與向上的機率相等，若其中一個方向沒路則必定走另一方向。
則下列哪些選項正確？
(1)方法 1 共有 56 種不同的走法
(2)方法 1 經過$P$點的機率為$\frac{5}{56}$
(3)方法 2 經過$P$點的機率為$\frac{1}{4}$
(4)有另一人從$B$點以同樣速率走向$A$，且兩人都使用方法 1，則他們在$P$相遇機率為$\frac{1}{196}$
(5)同(4)，若都使用方法 2（$B$往$A$走改為向左與向下相等機率），則他們在$P$點相遇機率為$\frac{1}{196}$

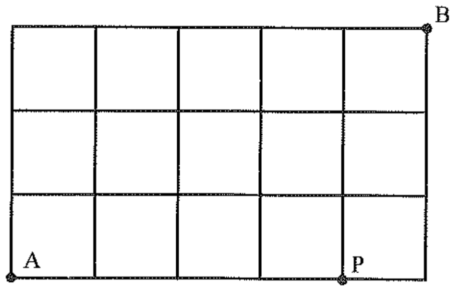


圖 3

**第貳部分：選填題**（占 35 分）

說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（⑭～㉞）。
2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設$y=f(x)$的圖形為開口向下拋物線，且與$x$軸交於$(\frac{1}{2},0)$、$(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$，試求$f(\sin x)<0$的解為 $\frac{⑭}{6}\pi<x<\frac{⑮}{6}\pi$ 和 $\frac{⑯}{4}\pi<x<\frac{⑰}{4}\pi$ 。$(0\le x\le 2\pi)$

B. 設圓$C$：$x^2+y^2=4$，點$P(-4,0)$，$Q$為圓上動點，試求直線$PQ$與坐標軸圍出的最大面積 $=\frac{⑱\sqrt{⑲}}{⑳}$ 。

C. 1 年 15 班有 30 位同學，在找尋課外選修時，經調查發現，有 18 位學生對電腦程式有興趣，$n$位同學對日文有興趣，但最多只有一半的人同時對這兩個有興趣，若$n$的最大值為$a$、最小值為$b$，則$a+b=$ ㉑㉒ 。

D. 考慮，$y=-x^2+4x+2$在坐標平面上與$x$軸正向、$y$軸正向所為出的區域，若在$1\le x\le 5$、$1\le y\le 5$的範圍內隨機選取一個格子點，則格子點恰落在此區域（不含邊界）的機率為 $\frac{㉓㉔}{㉕㉖}$ 。

E. 如圖 4，$ABCDEF$為正六邊形，已知$A$點位於原點，點$B$以極坐標表示為$[4,\frac{\pi}{12}]$，已知$\overline{DE}$延長線與$\overline{AF}$延長線交於$P$點，求$P$點的直角坐標為＿(−㉗$\sqrt{㉘}$，㉙$\sqrt{㉚}$)＿。

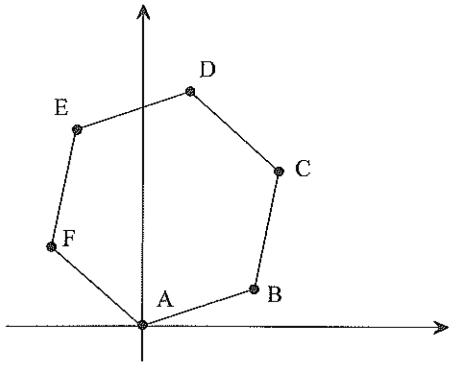


圖 4

F. 小妤和同學共三個人來到壽司店，發現今天特賣套餐有三種，分別為綜合握壽司套餐（鮭魚×2，鮪魚×2，旗魚×2、蝦壽司×2），盛合壽司套餐（鮭魚×3、鮪魚×3、旗魚×2）、鮮蝦雙饗套餐（蝦壽司×4、鮭魚×4），假設他們共點三個套餐，但希望每種壽司每個人都能吃到，因此每種口味要至少要有 3 個，則他們點餐的方法數有＿㉛＿種。
（不考慮哪一人點哪種套餐，只考慮最後點餐結果）

G. 如圖 5，長度為$r$的棍棒與水平面夾$\theta$角，$0\le\theta\le30°$。已知棍棒最高點與水平面最短距離為$t$，當夾角變更為$3\theta$時，最高點與水平面的距離變為$\frac{5}{2}t$，試求夾角為$2\theta$時，最高點與水平面的距離為＿$\frac{\sqrt{㉜㉝}}{㉞}$＿$t$。
（忽略棍棒的寬度）

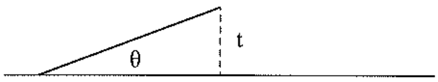


圖 5

## 參考公式及可能用到的數值：

1. 等差數列 $\langle a_n \rangle$ 公差為 $d$，則 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$

   等比數列 $\langle a_n \rangle$ 公比為 $r$，則 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$
2. 參考數值：$\sqrt{2} \approx 1.414$，$\sqrt{3} \approx 1.732$，$\sqrt{5} \approx 2.236$，$\sqrt{6} \approx 2.449$，$\pi \approx 3.142$
3. 對數值：$\log_{10} 2 \approx 0.3010$，$\log_{10} 3 \approx 0.4771$，$\log_{10} 5 \approx 0.6990$，$\log_{10} 7 \approx 0.8451$
4. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
5. 標準差：$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{X}^2}$
6. $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

   $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

   $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$
7. $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$；$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$
8. 平面上的直線 $L = ax+by+c=0$，則 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $L$ 的距離為：

   $d(P, L) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
9. $\sin 3\theta = -4\sin^3\theta + 3\sin\theta$

# 2018 學力測驗模擬考試卷（T3）
## 數學考科解析

**第壹部分：選擇題**

一、單一選擇題

1. (3)

【解答】$\sqrt{2\times\sqrt{12+8\sqrt{2}}}=\sqrt{2\times\sqrt{12+2\sqrt{32}}}$
$=\sqrt{2\times(\sqrt{4}+\sqrt{8})}$
$=\sqrt{4+4\sqrt{2}}>3$

故$n=3$

2. (2)

【解答】依題意可知$a_{2017}>0$、$a_{2018}<0$，且$\frac{a_{2017}+a_{2018}}{2}<0$

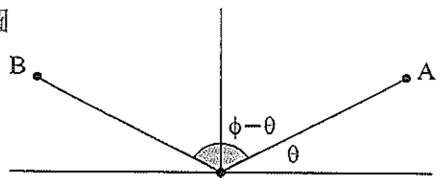
$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$=等差中項×$n$，

故取等差中項$=a_{2017}$時$n$為最大，

此時項數$n=2\times2016+1=4033$

3. (1)

【解答】如圖




$\cos(\phi-\theta)=\cos(180°-2\theta)=-\cos2\theta$

$=-(1-2\sin^2\theta)$

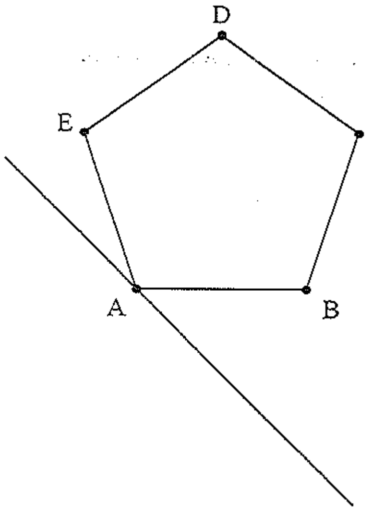
$=-(1-2\cdot(\frac{1}{3})^2)$

$=-\frac{7}{9}$

（若 A 點選其他象限可得到相同的值）

4. (1)

【解答】目標函數斜率為$-\frac{-1}{-1}=-1$，又$x$係數為負，故最大值為目標函數平移至最左端所碰到的點，如圖可知為 A 點




5. (5)

【解答】$y=0.9^x$為遞減函數，故選擇次方最小的選項，此時整個數值為最大。

$0.9\times0.9=0.81$為五個選項中次方最小的選項，故選(5)

6. (1)

【解答】數據資料越集中標準差越小，越分散標準差越大。

∴標準差與公差$d$的大小正負無關。

∴$k$越大標準差越大。

故選(1)

7. (3)

【解答】$\log2^{35}=35\cdot\log2=10.535$，為首位數字為 3 的 11 位數。

$\log3^{23}=23\cdot\log3=10.9733$，為首位數字為 9 的 11 位數，

故相加會進位為 12 位數。

二、多選題

8. (1)(3)(4)(5)

【解答】∵$\sqrt{\frac{3x-3}{\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{(x-2)^2}}}>0$，且$(x-2)^2\geq0$

∴$(x+1)(3x-3)>0$，$x\neq2$

∴$x<-1$或$x>1$，$x\neq2$均滿足$f(x)>0$

故選(1)(3)(4)(5)

9. (2)(3)(5)

【解答】(1)當$P$移至$(4,2)$時，共移動$2\sqrt{5}$單位，但$Q$移動到$(4,0)$共移動 4 單位，與「兩者速率相同」此敘述不合。

(2)$\Delta OAB$重心位於中線上，$A(2,3)$與$B(4,-6)$中點為$(3,-\frac{3}{2})$，與$P$點的移動方向$(2,-1)$一致。

(3)$\Delta OAB$內心位於角平分線上，

∵$\overline{OA}:\overline{OB}=1:2$

∴$\angle AOB$的角平分線方向

$=\frac{2}{3}\overline{OA}+\frac{1}{3}\overline{OB}=\frac{2}{3}(2,3)+\frac{1}{3}(4,-6)=\frac{1}{3}(8,0)$

故與$Q$點的移動方向$(2,0)$一致。

(4)(5)直線$AB$方程式為$9x+2y=24$，

設$P$點軌跡參數式$\begin{cases}x=2t\\y=-t\end{cases}$，$t\in R$，

$Q$點軌跡參數式$\begin{cases}x=\sqrt{5}t\\y=0\end{cases}$，$t\in R$

將$P$、$Q$點參數式代入直線$AB$方程式，

可得：$9\times2t-2t=24\Rightarrow t=\frac{3}{2}$，

故交點$R$的坐標為$(3,-\frac{3}{2})$

將$Q$點參數式代入，可得：$9\times\sqrt{5}t=24\Rightarrow t=\frac{8\sqrt{5}}{15}<\frac{3}{2}$

，故$Q$點會先到達$AB$線段上

故選(2)(3)(5)

10. (3)(4)

【解答】(1)$\sin180°=0$、$\sin150°=\frac{1}{2}$，

故$150°<\theta<180°\Rightarrow75°<\frac{\theta}{2}<90°$

(2)$\sqrt{1-(0.2)^2}<|\cos\theta|<\sqrt{1-(0.1)^2}\Rightarrow\sqrt{0.96}<|\cos\theta|<\sqrt{0.99}$

(3)$-\frac{0.2}{\sqrt{0.96}}<\tan\theta<-\frac{0.1}{\sqrt{0.99}}$

故$-0.2<|\tan\theta|<-0.11$區間均在$\tan\theta$範圍內，故正確

(4)$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta\Rightarrow0.92<1-2\sin^2\theta<0.98$

(5)$\frac{\theta}{3}$為第一象限角，故$\cos\frac{\theta}{3}$恆正

11. (2)(4)(5)

【解答】方案 A 總花費：$399\times6+699\times18=14976$

方案 B 總花費：$\frac{699+699+(24-1)\cdot(-10)}{2}\times24=14016$

方案 C 總花費：$749\times24-3000=14976$

故方案 B 最為划算。

方案 B 最後一個月繳交費用為

$699+(24-1)\cdot(-10)=469>399$，故方案 A 全距較高。

方案 A 中位數為 699，故方案 A 中位數較高。

方案 A 價格集中兩端、方案 B 均勻分布，故方案 A 標準差較高。

12. (1)(2)(3)

【解答】(1)交點坐標為$(1,1)\Rightarrow f(x)$為$y=2^x$向右平移一單位，$g(x)$為$y=\log_2 x$向上平移一單位$\Rightarrow a=-1$、$b=1$，$a+b=0$

$x=2$時，$f(2)=2^{2-1}=2$、$g(2)=\log_2 2+1=2$，故另一交點為$(2,2)$

(3)由圖可得兩交點之間，對數函數恆大於指數函數，故正確。

(4)(5)均必定有交點。

13. (1)(4)

【解答】(1)向上 3 單位，向右 5 單位，經排列共有$\frac{8!}{3!5!}=56$種走法。

(2)經過P點的路徑共有$1\cdot\frac{4!}{1!3!}=4$條，故機率為$\frac{1}{2}=\frac{1}{14}$

(3)經過 P 點必須連續 4 次選擇向右，故機率為$(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{16}$

(4)由(2)兩人到達 P 點機率均為$\frac{1}{14}$，故所求$(\frac{1}{14})^2=\frac{1}{196}$

(5)方法 2，由 A 到達 P 點機率為$\frac{1}{16}$，

由 B 到達 P 點機率為$3\times(\frac{1}{2})^4+(\frac{1}{2})^5=\frac{5}{16}$

故相遇機率為$\frac{1}{16}\cdot\frac{5}{16}=\frac{5}{256}$

第貳部分：選填題

A. $\frac{1}{6}\pi<x<\frac{5}{6}\pi$或$\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

【解答】設$f(x)=a(x-\frac{1}{2})(x+\frac{\sqrt{2}}{2})$，$a<0$

$f(sinx)<0$

$\Rightarrow a(\sin x-\frac{1}{2})(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2})$

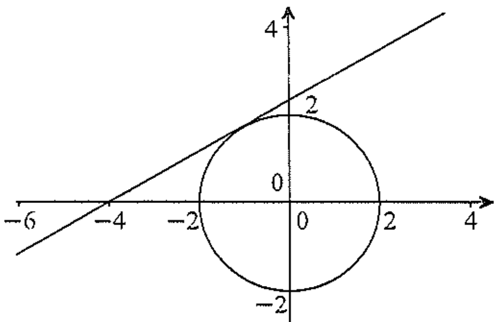
$\Rightarrow(\sin x-\frac{1}{2})(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2})>0$

$\Rightarrow\sin x>\frac{1}{2}$或$\sin x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$或$\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7}{4}\pi$

B. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

【解答】如圖，當直線 PQ 與圓相切時有面積最大值，




設圓心為 O，切線$L$：$y=m(x+4)$，

$d(O,L)=\frac{|4m|}{\sqrt{1+m^2}}=2$

解之得$m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$（取正負皆可）

$m=\frac{1}{\sqrt{3}}$時，$y$截距$m=\frac{4}{\sqrt{3}}$，

此時圍出面積$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

C. 27

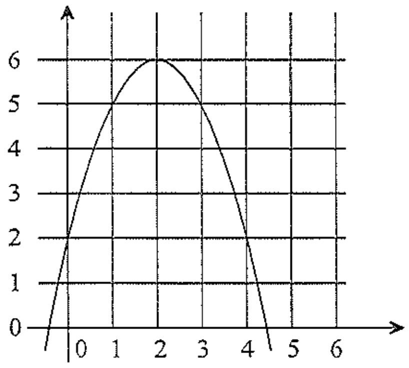
【解答】最多有 15 人對日文與程式同時有興趣，有 12 人對程式無興趣

故對日文有興趣的人數最多為 15＋12＝27

對日文有興趣的人數最少為 0 人，故$a+b=27$

D. $\frac{14}{25}$

【解答】如圖：




$x=1$時，$y=1,2,3,4$均在區域內

$x=2$時，$y=1,2,3,4,5$均在區域內

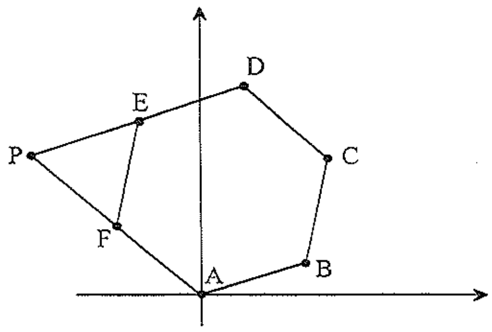
$x=3$時，$y=1,2,3,4$均在區域內

$x=4$時，$y=1$在區域內

故共有$4+5+4+1=14$個格子點在區域內，機率為$\frac{14}{25}$

E. $(-4\sqrt{2}，4\sqrt{2})$

【解答】正六邊形內角為$\frac{2\pi}{3}$，由此可知




F 點以極坐標表示為

$[4,\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}]=[4,\frac{9\pi}{12}]$

又如圖，$\overline{AP}=2\overline{AF}$，故 P 點以極坐標表示為$[8,\frac{9\pi}{12}]$

$=(8cos\frac{9\pi}{12},8sin\frac{9\pi}{12})=(-4\sqrt{2},4\sqrt{2})$

F. 5

【解答】1. 綜合握壽司 2 份以上即滿足題意，

共（綜、綜、綜）（綜、綜、盛）（綜、綜、蝦）3種。

2. 若綜合僅點一份：則盛合與鮮蝦必各一份 共 1 種。

3. 若無綜合，則必為（盛、盛、蝦） 共 1 種。

故共有 3＋1＋1＝5 種點餐方法

G. $\frac{\sqrt{14}}{2}$

【解答】$\begin{cases}t=r\sin\theta\\ \frac{5}{2}t=r\sin3\theta\end{cases}$，兩式相除

$\Rightarrow\frac{2}{5}=\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$

$\Rightarrow\frac{2}{5}=\frac{\sin\theta}{3\sin\theta-4\sin^3\theta}$

$\Rightarrow\frac{2}{5}=\frac{\sin\theta}{3\sin\theta-4\sin^3\theta}$

$\Rightarrow 6-8\sin^2\theta=5$

$\Rightarrow\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$（取正）

故當夾角為$2\theta$時，

最高點與水平面的距離：$r\sin2\theta=r\cdot2\sin\theta\cos\theta$

又$r\sin2\theta=t$、$\cos\theta=\frac{\sqrt{14}}{4}$，$\therefore r\cdot2\sin\theta\cos\theta=\frac{\sqrt{14}}{2}t$