全國公私立高級中學

105 學年度學科能力測驗第二次聯合模擬考試

考試日期：105 年 9 月 5~6 日

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 65 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 蟋蟀是會隨著周遭溫度改變體溫的變溫動物，當溫度升高時，蟋蟀翅膀的摩擦速度會變快，所以固定時間內的鳴叫次數也會增加。科學家發現，將蟋蟀 13.5 秒內鳴叫的次數，加上 41 所得的數字，就是目前的華氏溫度，即 $f(t)=13.5t+41$，其中 t 爲蟋蟀每秒鳴叫的次數，$f(t)$ 爲目前的華氏溫度。例如：$t=2$ 時，$f(2)=13.5\times 2+41=68$，即當蟋蟀每秒鳴叫 2 次時的華氏溫度爲 68 度。若另有一個函數 $g(t)=at+b$，其中 t 爲蟋蟀每秒鳴叫的次數，$g(t)$ 爲目前的攝氏溫度。請問 $a+b$ 之值爲下列哪一選項？(已知攝氏溫度 $=(\text{華氏溫度}-32)\times\dfrac{5}{9}$)

   (1) 12.5
   (2) 13.5
   (3) 14.5
   (4) 15.5
   (5) 16.5

2. 設 $f(x)=x^4-22x^2+36x+40$，且 $f(3-i)=0$，請問滿足 $f(x)<0$ 的整數解有幾個？

   (1) 3 個
   (2) 4 個
   (3) 5 個
   (4) 6 個
   (5) 7 個

3. 若 $a+\log_3 5$、$a+\log_9 5$、$a+\log_{27} 5$ 三數成等比，則公比爲下列哪一選項？

   (1) $\frac{1}{2}$
   (2) $\frac{1}{3}$
   (3) 1
   (4) 2
   (5) 3

4. 若 $S_n = 1+(1+2)+(1+2+2^2)+\cdots+(1+2+\cdots+2^n)$。則 S_{10} 之值爲下列哪一選項？

(1) 4073

(2) 4077

(3) 4080

(4) 4083

(5) 4086

5. 使用 3 種不同的顏色塗圖(1)，每區塊只能塗一色，規定相鄰區塊必須異色，且 3 種顏色都必須使用。求所有塗色的方法數有幾種？

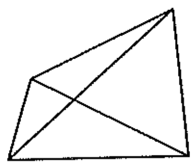
(1) 6

(2) 12

(3) 18

(4) 24

(5) 27



圖(1)

6. 已知有一組二維數據 (x_i, y_i)，$i=1,2,\cdots,n$。滿足 $\mu_X=12$，$\mu_Y=8$，$\sigma_X=3$，$\sigma_Y=5$。若此二維數據的迴歸直線方程式爲 $y-\mu_Y=m(x-\mu_X)$，則斜率 m 的範圍爲下列哪一選項？

(1) $-1\le m\le 1$

(2) $-3\le m\le 3$

(3) $-5\le m\le 5$

(4) $-\frac{3}{5}\le m\le \frac{3}{5}$

(5) $-\frac{5}{3}\le m\le \frac{5}{3}$

二、多選題（占 35 分）

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 設 a、b、c、d、e 皆為正整數，多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+26$，$g(x)=x^4+cx^3+dx^2+ex+65$。若 α、β 為兩相異整數，滿足 $f(\alpha)=f(\beta)=g(\alpha)=g(\beta)=0$。請選出正確的選項。

   (1) $f(x)=0$ 恰有 3 個整數解

   (2) $g(x)=0$ 恰有 2 個整數解

   (3) $g(x)=0$ 恰有 4 個整數解

   (4) $\alpha+\beta=-14$

   (5) $a=16$

8. 如圖(2)，四個函數 $y=3^x$，$y=\log_3 x$，$y=4-x$，$y=11-x$ 的圖形分別交於 A,B,C,D 四點。請選出正確的選項。

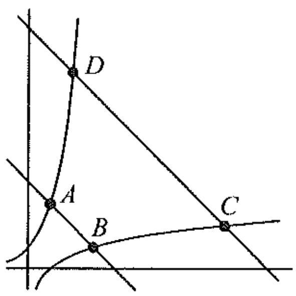
   (1) 四邊形 $ABCD$ 是等腰梯形

   (2) 四邊形 $ABCD$ 恰有一條對稱軸 $x+y=0$

   (3) 四邊形 $ABCD$ 的周長為 $9\sqrt{2}+12$

   (4) 四邊形 $ABCD$ 的面積為 $\dfrac{63}{2}$

   (5) 若 $m_{\overline{AB}}$ 表示 A,B 兩點的斜率，則 $m_{\overline{AD}}\times m_{\overline{BC}}=1$



圖(2)

9. 將 8 個不同的獎品，依下列各種情況分配：

第一種情形：平分成四堆，共有 a 種分配方法。

第二種情形：平分給甲、乙、丙、丁四人，共有 b 種分配方法。

第三種情形：依 4 個、2 個、2 個分成三堆，共有 c 種分配方法。

第四種情形：依甲分到 4 個，乙、丙二人各分得 2 個，共有 d 種分配方法。

第五種情形：分給甲、乙、丙三人，只知道其中一人得 4 個，另二人各得 2 個，共有 e 種分配方法。

請選出正確的選項。

(1) $a=630$

(2) $b=24a$

(3) $c=210$

(4) $d=2c$

(5) $e=3c$

10. 有 4 張紅色紙牌，6 張白色紙牌，任意疊成一堆。今從上到下逐一取牌，設取到第 k 張牌時恰為第 4 張紅色牌的機率為 P_k。請選出正確的選項。

(1) $P_3=0$

(2) $P_4=\dfrac{1}{210}$

(3) $P_{10}=\dfrac{2}{5}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=4}^{7}P_k=\frac{1}{3}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}P_k=1$

11. 設 A、B 為樣本空間 S 中的事件，A'、B' 為餘事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$。請選出正確的選項。

(1) 若 A、B 為獨立事件，則 $P(B)=\dfrac{5}{12}$

(2) 若 A、B 為獨立事件，則 $P(A|B)=\dfrac{1}{3}$

(3) 若 A、B 為獨立事件，則 $P(B|A)=\dfrac{5}{8}$

(4) 若 A、B 為互斥事件，則 $P(B)=\dfrac{5}{12}$

(5) 若 A、B 為互斥事件，則 $P(B'|A)=1$

12. 表(1)是小靜在 8 年級至 12 年級間，每學年數學成績與英文成績的成績統計：請根據這張表選出正確的選項。

表(1)

年級(X)	數學成績(Y)	英文成績(Z)
8	85	93
9	80	93
10	79	84
11	77	80
12	79	82

(1) 兩變量 X、Y的相關係數為$-\frac{\sqrt{10}}{4}$
(2) 將兩變量 X、Y標準化後得到新的變量 X'、Y'，則 X'、Y'的相關係數比 X、Y 的相關係數大
(3) Y、Z的相關係數與 Z、Y的相關係數相同
(4) 兩變量Y、Z為負相關
(5) 由表(1)可知小靜的數學學習一直在退步

13. 關於下列各實數數列。請選出正確的選項。
(1) 數列$\langle a_n\rangle$之前 n項的和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=3n^2-5$，則$\langle a_n\rangle$為等差數列
(2) 數列$\langle b_n\rangle$之前 n項的和 $S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=n^2+2n$，則$\langle b_n\rangle$為等差數列
(3) 數列$\langle c_n\rangle$滿足 $c_1=\sqrt{2}$ 且 $c_{n+1}=2^n\cdot c_n$，n為正整數，則 $c_n=2^{\frac{n^2-n+1}{2}}$
(4) 數列$\langle d_n\rangle$滿足 $d_1=3$且 $d_{n+1}=d_n+(3n+2)$，n為正整數，則 $d_n=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$
(5) 數列$\langle e_n\rangle$滿足 $e_1=3$且 $e_{n+1}=\frac{1}{2}e_n+3$，n為正整數，則 $e_n=4-\frac{1}{2^{n-1}}$

第貳部分：選填題（占 35 分）

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(14–29)。
2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 在數線上有四個點 $A(11)$、$B(12)$、$C(90)$、$D(91)$，若點 $P(x)$到 A、B兩點的距離和與點 $P(x)$到 C、D兩點的距離和相等，即$|x-11|+|x-12|=|x-90|+|x-91|$，則 x之值為 ⑭⑮。

B. 已知 $x=\sqrt{2}+1$，則 $\log_{\frac{1}{4}}(x^4-x^3-2x^2-3x+7)$之值為 $\frac{⑯⑰}{⑱}$。(化成最簡分數)

C. 小冠買了一台最大只能計算到 50 位數的計算機。一日小冠閒來無事，用計算機去算 6 的 n 次連乘積，即 6^n 的值，n 爲正整數。在計算機能計算的前提下(即 $6^n<10^{50}$)，求 n 的最大值爲 ⑲⑳ 。

D. 已知 a 爲實數，高斯符號 $[a]$ 表示不大於 a 的最大整數，例如：$[2.3]=2$，$[4]=4$。則 $\sum_{k=1}^{105}[\sqrt{k}]=$ ㉑㉒㉓ 。

E. NBA 總冠軍戰採 7 戰 4 勝制(先獲得 4 場勝利者，即爲總冠軍)。今有詹詹隊與柯柯隊爭奪總冠軍。已知兩隊實力相當，且前一戰勝負，不會影響下一戰的勝負。若比賽到第 7 戰才產生總冠軍隊，小亞猜測兩隊在前 4 戰的戰績各爲 2 勝 2 敗，請問小亞猜對的機率爲 $\frac{㉔}{㉕}$。(化成最簡分數)

F. 已知 a、b、c 爲實數且這 3 個數的算術平均數爲 μ，標準差爲 σ。若加入 11、13、13、19 這 4 個數之後，a、b、c、11、13、13、19 這 7 個數的算術平均數亦爲 μ，標準差亦爲 σ，則 $\mu+\sigma=$ ㉖㉗ 。

G. 已知 $a_1, a_2, a_3 \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$，且 $a_1 \neq 0$，設 $a_1a_2a_3$ 爲一個三位數，我們可以定義這個三位數 $a_1a_2a_3$ 的長度爲 $\|a_1a_2a_3\|=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|$，例如：385 的長度爲 $\|385\|=|3-8|+|8-5|=8$，則滿足 $\|a_1a_2a_3\|=2$ 的三位數共有 ㉘㉙ 個。

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\frac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\ (r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 一維數據 $X:x_1,x_2,\cdots,x_n$，算術平均數 $\mu_X=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\frac{1}{n}((\sum_{i=1}^{n}x_i^2)-n\mu_X^2)}$

3. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，相關係數 $r_{X,Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線(最適合直線)方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

4. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$，$\sqrt{3}\approx 1.732$，$\sqrt{5}\approx 2.236$，$\sqrt{6}\approx 2.449$，$\pi\approx 3.142$

5. 對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010$，$\log_{10}3\approx 0.4771$，$\log_{10}5\approx 0.6990$，$\log_{10}7\approx 0.8451$

全國公私立高級中學 105 學年度學科能力測驗第二次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：105 年 9 月 5~6 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	2	4	2	5	145	145	234	1235	2345	13	234	5	1
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
–	3	2	6	4	6	7	5	3	5	1	7	6	2	

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 假設蟋蟀每秒鳴叫 t 次，華氏溫度 $=13.5t+41$

   攝氏溫度 $=((13.5t+41)-32)\times\frac{5}{9}=7.5t+5$

   所以 $a+b=7.5+5=12.5$，故選(1)

2. 因爲 $x=3-i\Rightarrow x-3=-i\Rightarrow(x-3)^2=(-i)^2\Rightarrow x^2-6x+10=0$

   所以 $f(x)=x^4-22x^2+36x+40=(x^2-6x+10)(x^2+6x+4)$

   $=(x^2-6x+10)[x-(-3+\sqrt{5})][x-(-3-\sqrt{5})]$

   所以 $f(x)<0$ 的解爲 $-3-\sqrt{5}<x<-3+\sqrt{5}$

   $f(x)<0$ 的整數解爲 $-5,-4,-3,-2,-1$，共 5 個，故選(3)

3. 我們可以簡化式子，令 $\log_3 5=k$

   故原題可改成 $a+k$ 、 $a+\frac{k}{2}$ 、 $a+\frac{k}{3}$ 三數成等比

   $\Rightarrow(a+\frac{k}{2})^2=(a+k)(a+\frac{k}{3})\Rightarrow a^2+ak+\frac{k^2}{4}=a^2+\frac{4}{3}ak+\frac{k^2}{3}$

   $\Rightarrow-\frac{k^2}{12}=\frac{1}{3}ak\Rightarrow k=-4a$ ，公比 $=\dfrac{a+\frac{k}{2}}{a+k}=\dfrac{-a}{-3a}=\dfrac{1}{3}$ ，故選(2)

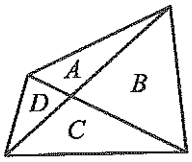
4. 由等比級數公式 $1+2+\cdots+2^n=\frac{1(2^{n+1}-1)}{2-1}=2^{n+1}-1$

   所以 $S_{10}=1+(1+2)+(1+2+4)+\cdots+(1+2+\cdots+2^{10})$

   $=(2-1)+(2^2-1)+(2^3-1)+\cdots+(2^{11}-1)$

   $=(2+2^2+2^3+\cdots+2^{11})-11=(2^{12}-2)-11=4083$ ，故選(4)

5. 因爲 3 種顏色都必須使用，所以恰有兩個區塊同色，又因爲相鄰區塊必須異色，所以我們討論

   ① AC 同色，$\underset{A}{3}\times\underset{C}{1}\times\underset{B}{2}\times\underset{D}{1}=6$ (種)

   ② BD 同色，$\underset{B}{3}\times\underset{D}{1}\times\underset{A}{2}\times\underset{C}{1}=6$ (種)

   共有 12 種塗法，故選(2)

6. 由迴歸直線方程式的公式可知斜率 $m=r_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$

   且 $-1\le r_{X,Y}\le1$，所以 $-\frac{5}{3}\le m\le\frac{5}{3}$ ，故選(5)

二、多選題

7. 由牛頓定理可知 $f(x)=x^3+ax^2+bx+26=0$ 的整數解可能爲

   $\pm1,\pm2,\pm13,\pm26$

   $g(x)=x^4+cx^3+dx^2+ex+65=0$ 的整數解可能爲

   $\pm1,\pm5,\pm13,\pm65$

   且兩多項式的係數皆爲正整數，所以 α,β 之値爲 $-1,-13$

   所以 $f(x)=x^3+ax^2+bx+26=(x+1)(x+13)(x+k)$

   比較常數項，可得 $k=2$

   $f(x)=(x+1)(x+13)(x+2)=x^3+16x^2+41x+26$

   同理， $g(x)=x^4+cx^3+dx^2+ex+65$

   $=(x+1)(x+13)(x^2+mx+5)$

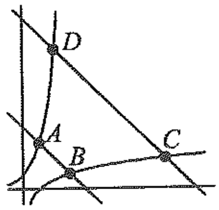
   因爲 c,d,e 之值未定，所以 m 之値可以爲任意正整數

   所以 $x^2+mx+5=0$ 可能有實數解，也可能爲虛根

   故選(1)(4)(5)

8. 如下圖，可解得四個點坐標爲

   $A(1,3)$ ， $B(3,1)$ ， $C(9,2)$ ， $D(2,9)$

   因爲函數 $y=3^x$ ， $y=\log_3 x$

   對稱於直線 $y=x$

   且直線 $y=4-x$ ， $y=11-x$

   亦與直線 $y=x$ 垂直

   所以四邊形 $ABCD$ 是等腰梯形

   $m_{\overline{AD}}\times m_{\overline{BC}}=1$

   四邊形 $ABCD$ 的周長爲

   $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=2\sqrt{2}+\sqrt{37}+7\sqrt{2}+\sqrt{37}=9\sqrt{2}+2\sqrt{37}$

   四邊形 $ABCD$ 的面積爲

   $\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&3&9&2&1\\3&1&2&9&3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}(1+6+81+6-9-9-4-9)=\frac{63}{2}$

   [另解]直線 $y=4-x$ ， $y=11-x$ 的距離爲 $\frac{7}{\sqrt{2}}$

   四邊形 $ABCD$ 的面積 $=(\overline{AB}+\overline{CD})\times\frac{7}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$

   $=9\sqrt{2}\times\frac{7}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{63}{2}$ ，故選(1)(4)(5)

9. (1) $a=\frac{C_2^8C_2^6C_2^4C_2^2}{4!}=105$

   (2) $b=\frac{C_2^8C_2^6C_2^4C_2^2}{4!}\times4!=24a$

   (3) $c=\frac{C_4^8C_2^4C_2^2}{2!}=210$

   (4) $d=\frac{C_4^8C_2^4C_2^2}{2!}\times1\times2!=2c$

   (5) $e=\frac{C_4^8C_2^4C_2^2}{2!}\times3!=6c$

   故選(2)(3)(4)

10. 依題意 $P_1=P_2=P_3=0$

    $P_k=\frac{C_3^{k-1}}{C_4^{10}}=\frac{4(k-1)(k-2)(k-3)}{10\times9\times8\times7}$ ， $k\ge4$

    所以， $P_4=\frac{1}{210}$ ， $P_{10}=\frac{2}{5}$

    $\sum_{k=4}^{7}P_k=\frac{C_3^3+C_3^4+C_3^5+C_3^6}{C_4^{10}}=\frac{C_4^7}{C_4^{10}}=\frac{7\times6\times5\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{1}{6}$

    $\sum_{k=4}^{10}P_k=\frac{C_3^3+C_3^4+\cdots+C_3^9}{C_4^{10}}=\frac{C_4^{10}}{C_4^{10}}=1$

    故選(1)(2)(3)(5)

11. 若 A 、 B 爲獨立事件，則 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot P(B)$

    (1) 因爲 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

    $\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{3}P(B)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}P(B)\Rightarrow P(B)=\frac{5}{8}$

(2)(3) 因為 A 、 B 獨立

$P(A|B)=P(A)=\frac{1}{3}$ ， $P(B|A)=P(B)=\frac{5}{8}$

若 A 、 B 為互斥事件，則 $P(A\cap B)=0$

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{1}{3}+P(B)-0\Rightarrow P(B)=\frac{5}{12}$

(5) $P(B'|A)=\frac{P(A\cap B')}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$

故選(2)(3)(4)(5)

12. $\mu_X=\frac{8+9+10+11+12}{5}=10$ ， $\mu_Y=\frac{85+80+79+77+79}{5}=80$

(1) $r=$

$$\frac{(8-10)(85-80)+(9-10)(80-80)+(10-10)(79-80)+(11-10)(77-80)+(12-10)(79-80)}{\sqrt{(8-10)^2+(9-10)^2+(10-10)^2+(11-10)^2+(12-10)^2}\sqrt{(85-80)^2+(80-80)^2+(79-80)^2+(77-80)^2+(79-80)^2}}$$

$=\frac{-10+0+0-3-2}{\sqrt{4+1+0+1+4}\sqrt{25+0+1+9+1}}=\frac{-\sqrt{10}}{4}$

(2) X 、 Y 標準化後，相關係數不變

(3) 由相關係數公式可知 Y 、 Z 的相關係數與 Z 、 Y 的相關係數相同

(4) 由表可知兩變量 Y 、 Z 為正相關

(5) 因為沒有全體學生的成績可以比較，故無法判斷小靜在數學學習上是否退步

故選(1)(3)

13. (1) 當 $n=1$ 時， $a_1=S_1=3\cdot 1^2-5=-2$

當 $n\geq 2$ 時， $a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2-5)-(3(n-1)^2-5)=6n-3$

所以 $\langle a_n\rangle$ 不是一個等差數列

由第二項開始 $\langle a_n\rangle$ 才是一個等差數列

(2) 當 $n=1$ 時， $b_1=S_1=1^2+2=3$

當 $n\geq 2$ 時， $b_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2+2n)-[(n-1)^2+2(n-1)]=2n+1$

所以 $\langle b_n\rangle$ 是一個等差數列

(3) $c_2=2^1\cdot c_1$

$c_3=2^2\cdot c_2$

$\vdots$

$\times) c_n=2^{n-1}\cdot c_{n-1}$

$c_n=2^1\times 2^2\times\cdots\cdots\times 2^{n-1}\cdot c_1=2^{1+2+\cdots\cdots+(n-1)}\cdot\sqrt{2}$

$=2^{\frac{(n-1)\cdot n}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{n^2-n+1}{2}}$

(4) 因為 $d_{n+1}=d_n+(3n+2)$

$d_2=d_1+3\times 1+2$

$d_3=d_2+3\times 2+2$

$\vdots$

$+) d_n=d_{n-1}+3\times(n-1)+2$

$d_n=d_1+3(1+2+\cdots+(n-1))+2(n-1)=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1$

(5) 因為 $e_{n+1}=\frac{1}{2}e_n+3\cdots\cdots$ ①

$e_n=\frac{1}{2}e_{n-1}+3\cdots\cdots$ ②

①－② $\Rightarrow e_{n+1}-e_n=\frac{1}{2}(e_n-e_{n-1})$ ，又 $e_2-e_1=\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$

表示數列 $\langle e_{n+1}-e_n\rangle$ 為首項 $\frac{3}{2}$ ，公比 $\frac{1}{2}$ 的等比數列

$\therefore e_n=e_1+(e_2-e_1)+(e_3-e_2)+\cdots+(e_n-e_{n-1})$

$=3+\frac{\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{2})^{n-1}]}{1-\frac{1}{2}}=3+3[1-(\frac{1}{2})^{n-1}]$

$=3+3-3\times(\frac{1}{2})^{n-1}=3(2-\frac{1}{2^{n-1}})=6(1-\frac{1}{2^n})$

故選(2)(3)(4)

第貳部分：選填題

A. 討論：① $91\leq x$ ， $|x-11|+|x-12|=|x-90|+|x-91|$

$\Rightarrow (x-11)+(x-12)=(x-90)+(x-91)$

$\Rightarrow 2x-23=2x-181$ ，無解

② $90\leq x<91$ ， $|x-11|+|x-12|=|x-90|+|x-91|$

$\Rightarrow (x-11)+(x-12)=(x-90)-(x-91)$

$\Rightarrow 2x-23=1\Rightarrow x=12$ ，不合

③ $12\leq x<90$ ， $|x-11|+|x-12|=|x-90|+|x-91|$

$\Rightarrow (x-11)+(x-12)=-(x-90)-(x-91)$

$\Rightarrow 2x-23=-2x+181\Rightarrow x=51$

④ $11\leq x<12$ ， $|x-11|+|x-12|=|x-90|+|x-91|$

$\Rightarrow (x-11)-(x-12)=-(x-90)-(x-91)$

$\Rightarrow 1=-2x+181\Rightarrow x=90$ ，不合

⑤ $x<11$ ， $|x-11|+|x-12|=|x-90|+|x-91|$

$\Rightarrow -(x-11)-(x-12)=-(x-90)-(x-91)$

$\Rightarrow -2x+23=-2x+181$ ，無解

[另解]由數線可知，點 $A(11)$ ， $C(90)$ 與 $B(12)$ ， $D(91)$ 均對稱於點 $M(51)$，所以當 $P(x)$ 為點 $M(51)$ 時， $P(x)$ 到 A 、 B 兩點的距離和與點 $P(x)$ 到 C 、 D 兩點的距離和相等。故 $x=51$

B. 令 $x=\sqrt{2}+1\Rightarrow (x-1)^2=2\Rightarrow x^2-2x-1=0$

因為 $x^4-x^3-2x^2-3x+7=(x^2-2x-1)(x^2+x+1)+8$

所以當 $x=\sqrt{2}+1\Rightarrow x^2-2x-1=0$

$\Rightarrow x^4-x^3-2x^2-3x+7=(x^2-2x-1)(x^2+x+1)+8=8$

所求 $\log_{\frac{1}{4}}(x^4-x^3-2x^2-3x+7)=\log_{\frac{1}{4}}8=\log_{2^{-2}}2^3=\frac{-3}{2}$

C. $6^n<10^{50}\Rightarrow \log 6^n<\log 10^{50}\Rightarrow n\log 6<50\Rightarrow n<\frac{50}{\log 2+\log 3}$

$\Rightarrow n<\frac{50}{0.7781}\approx 64.26\Rightarrow n\leq 64$ ，故 n 的最大值為 64

D. 因為 $[\sqrt{n^2}]=[\sqrt{n^2+1}]=\cdots=[\sqrt{(n+1)^2-1}]=n$

且 $n^2,\cdots,(n+1)^2-1$ 共有 $2n+1$ 項

所以 $[\sqrt{n^2}]+[\sqrt{n^2+1}]+\cdots+[\sqrt{(n+1)^2-1}]=n\times(2n+1)$

$\sum_{k=1}^{105}[\sqrt{k}]=[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{99}]+[\sqrt{100}]+\cdots+[\sqrt{105}]$

$=1+1+1+2+\cdots+9+10+\cdots+10$

$=1\times 3+2\times 5+\cdots+9\times 19+10\times 6$

$=(\sum_{k=1}^{9}k(2k+1))+60=(2\sum_{k=1}^{9}k^2+\sum_{k=1}^{9}k)+60=675$

E. 因為第 7 戰才產生總冠軍隊，所以前 6 戰兩隊的戰績各為 3 勝 3 負，小亞猜對的機率為 $\frac{C_2^4\times 2!}{C_3^6}=\frac{3}{5}$

F. 因為 $\mu=\frac{a+b+c}{3}=\frac{a+b+c+11+13+13+19}{7}$

$\Rightarrow 11+13+13+19=4\mu$

所以 $\mu=\frac{11+13+13+19}{4}=14$

同理 $\sigma=\sqrt{\frac{(a-\mu)^2+(b-\mu)^2+(c-\mu)^2}{3}}$

$$=\sqrt{\frac{(a-\mu)^2+(b-\mu)^2+(c-\mu)^2+(11-\mu)^2+(13-\mu)^2+(13-\mu)^2+(19-\mu)^2}{7}}$$

所以 $\sigma=\sqrt{\frac{(11-\mu)^2+(13-\mu)^2+(13-\mu)^2+(19-\mu)^2}{4}}$

$$=\sqrt{\frac{(11-14)^2+(13-14)^2+(13-14)^2+(19-14)^2}{4}}=3$$

故 $\mu+\sigma=17$

G. $\|a_1a_2a_3\|=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|=2$

①$|a_1-a_2|=2$，$|a_2-a_3|=0$

$(a_1,a_2,a_3)=(1,3,3),(2,4,4)\cdots(7,9,9)$

$(2,0,0),(3,1,1)\cdots(9,7,7)$，共 15 個

②$|a_1-a_2|=0$，$|a_2-a_3|=2$

$(a_1,a_2,a_3)=(1,1,3),(2,2,4)\cdots(7,7,9)$

$(2,2,0),(3,3,1)\cdots(9,9,7)$，共 15 個

③$|a_1-a_2|=1$，$|a_2-a_3|=1$

$(a_1,a_2,a_3)=(1,2,3),(2,3,4)\cdots(7,8,9)$

$(2,1,0),(3,2,1)\cdots(9,8,7)$

$(1,2,1),(2,3,2)\cdots(8,9,8)$

$(1,0,1),(2,1,2)\cdots(9,8,9)$，共 32 個

由①②③可知共 62 個