全國公私立高級中學

104 學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

考試日期：104 年 11 月 5~6 日

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 4 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 J 題共 10 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\underset{\square}{3}$ 與第 19 列的 $\underset{\square}{8}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	▭	▭	■	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭
19	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	■	▭	▭	▭	▭

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\underset{\square}{-}$ 與第 21 列的 $\underset{\square}{7}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	▭	■	▭
21	▭	▭	▭	▭	▭	▭	■	▭	▭	▭	▭	▭

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 50 分）

一、單選題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 已知 $f(x)$、$g(x)$ 分別是實係數偶函數和奇函數，且 $f(x)-g(x)=x^3+x^2+1$，則 $f(1)+g(1)=$？

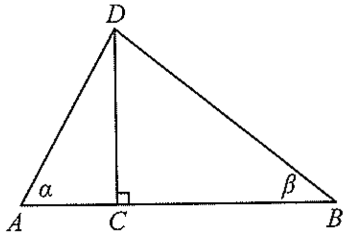
   (1) -3
   (2) -1
   (3) 0
   (4) 1
   (5) 3

2. 若將數列 $1, 1+3, 3+5+7, 5+7+9+11, 7+9+11+13+15, \cdots$ 記為 $\{a_n\}$，則 a_{2016} 的個位數字為何？

   (1) 0
   (2) 2
   (3) 4
   (4) 6
   (5) 8

3. 如圖(1)，某工廠要在 A、B 兩地連線上的定點 C 建造廣告牌 CD，其中 D 為頂端，且 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$，$AC$ 長 35 公尺，BC 長 80 公尺。設 A、B 在同一水平面上，從 A 和 B 看 D 的仰角分別為 α 和 β。若要求 $\alpha\geq 2\beta$，則 $\overline{CD}$ 最大值最靠近哪一個整數？

   (1) 27
   (2) 28
   (3) 29
   (4) 30
   (5) 31



圖(1)

4. 設 x、y 皆大於 0，$xy+3y=15$，則 xy^2 之最大值爲何？

(1) 12

(2) $\frac{63}{4}$

(3) 18

(4) $\frac{75}{4}$

(5) $\frac{49}{4}$

二、多選題（占 30 分）

說明：第 5 題至第 10 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. x、y 皆爲實數，且滿足 $|x-1|\le 3$ 且 $|2y+7|\le 3$，選出下列各式之範圍何者正確？

(1) $0\le x-y\le 9$

(2) $-20\le xy\le 10$

(3) $-2\le \frac{x}{y}\le 1$

(4) $4\le x^2\le 16$

(5) $4\le y^2\le 25$

6. 設 $f(x)$ 爲一個次數不超過三次的實係數多項式，滿足 $f(-1)=1$，$f(1)=5$，$f(3)=9$，且常數項爲 a。請選出正確的選項。

(1) $f(x)=\frac{a}{3}(x+1)(x-1)(x-3)+\frac{-1}{8}x(x-1)(x-3)-\frac{5}{4}x(x+1)(x-3)+\frac{3}{8}x(x+1)(x-1)$

(2) 可以找到實數 a，使得多項式 $y=f(x)$ 爲二次多項式

(3) 對任意的實數 a，方程式 $f(x)=0$ 恆有實數解

(4) 對任意大於 3 的實數 a，方程式 $f(x)=0$ 在 1 與 3 之間一定沒有實根

(5) 設 $g(x)$ 爲四次實係數多項式，且滿足 $g(-1)=1$，$g(1)=5$，$g(3)=9$，$g(0)=a$，則 $g(x)$ 除以 $x(x+1)(x-1)(x-3)$ 的餘式爲 $f(x)$

7. 關於指數函數或對數函數圖形的敘述，請選出正確的選項。

(1) $y=-\log_{2016}x$ 與 $y=2016^{-x}$ 兩函數的圖形對稱於直線 $y=x$

(2) $y=\log_{2016}x$ 與 $y=2016^{x}$ 兩函數的圖形交於一點

(3) 在 $y=2016^{x}$ 的圖形上任取相異兩點 A、B，則直線 AB 的斜率必為正

(4) $y=\log_{2016}(x^2-12x+40)$ 的圖形與 x 軸相交

(5) $y=2016^{x}$ 的圖形恆在 $y=2016^{-x}$ 的上方

8. 設 $a=\log_3 6$，$b=\log_5 10$，$c=\log_7 14$，請選出正確的選項。

(1) $c>b>a$

(2) $a>b>c$

(3) $a>c>b$

(4) $a>1.5$

(5) $c>1.5$

9. 設每個工作日甲、乙、丙、丁 4 人需使用某種設備的機率分別為 0.6、0.5、0.5、0.4，4 人是否需使用設備互相獨立。請選出正確的選項。

(1) 今已知甲需使用設備，則當日至少 2 人需使用設備的機率為 0.85

(2) 今已知甲需使用設備，則當日至少 3 人需使用設備的機率為 0.4

(3) 今已知甲需使用設備，則當日只有 2 人需使用設備的機率為 0.45

(4) 今已知丙需使用設備，則當日只有 2 人需使用設備的機率為 0.38

(5) 今已知甲、乙皆需使用設備，則當日至少 3 人需使用設備的機率為 0.7

10. 已知某班學生的化學成績 (X) 與生物成績 (Y) 的算術平均數分別為 $\bar{x}=70$，$\bar{y}=75$，且其相關係數為 $r=0.8$。若 Y 對 X 的迴歸直線過點 $(10,35)$，請選出正確的選項。
   (1) y 對 x 的迴歸直線必過點 $(70,75)$
   (2) y 對 x 的迴歸直線斜率為 0.8
   (3) x 的標準差是 y 的標準差的 1.2 倍
   (4) x 的標準差是 y 的標準差的 1.5 倍
   (5) 若已知該班某位同學化學成績高於 70 分，則他的生物成績必高於 75 分

第貳部分：選填題（占 50 分）

說明：1.第 A 至 J 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(11–32)。
2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 已知不等式方程組 $\begin{cases} x\geq 0 \\ x+3y\geq 3 \\ 3x+2y\leq 6 \end{cases}$ 所表示的平面區域被直線 $y=kx+2$ 分成面積比是 1：1 的兩部分，則 k 的值為 $\dfrac{⑪⑫⑬}{⑭⑮}$。(化為最簡分數)

B. 已知 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{60}$ 是由正數組成的等比數列，公比為 r，且 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_{60}=r^{60}$，若 $a_3\cdot a_6\cdot a_9\cdot\ldots\cdot a_{60}=r^n$，則 n 為 ⑯⑰ 。

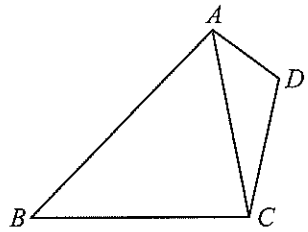
C. 某大學志工協會有 6 名男學生，4 名女學生。在這 10 名同學中，有 3 名同學來自國文系，其餘 7 名同學來自英文、歷史等其他互不相同的七個學系，現欲選取 3 名同學到希望小學任教(每位同學被選到的機率相同)，則選出的 3 名同學來自不相同學系的選法有 ⑱⑲ 種。

D. $\left(\frac{x}{\sqrt{y}}-\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^8$的展開式中 x^2y^2的係數為 ⑳㉑ 。

E. 甲乙兩人進行圍棋比賽，約定先連勝兩局者直接贏得比賽。假設每局甲獲勝的機率為 $\frac{2}{3}$，乙獲勝的機率為 $\frac{1}{3}$，各局比賽結果相互獨立，則甲在 4 局以內(含 4 局)贏得比賽的機率為 $\frac{㉒㉓}{㉔㉕}$ 。(化為最簡分數)

F. 輔導老師將班上同學的性向測驗成績當 x值，成就測驗成績當 y值，求出 y對 x的迴歸直線為 $y=0.81x+3.3$。若該班導師將成就測驗成績當 x值，性向測驗成績當 y值，求出 y對 x的迴歸直線為 $y=0.64x+31.6$，若性向測驗成績及成就測驗成績的相關係數為 r，則 $100r$ 為 ㉖㉗ 。

G. 如圖(2)，四邊形 $ABCD$，$\overline{AD}=1$，$\overline{CD}=2$，$\overline{AC}=\sqrt{7}$，若 $\cos\angle BAD=-\frac{\sqrt{7}}{14}$，$\sin\angle CBA=\frac{\sqrt{21}}{6}$，則 $\overline{BC}=$ __㉘__ 。



圖(2)

H. 圓 $x^2+y^2=4$ 的切線與 x 軸正向、y 軸正向圍成一個三角形，則該三角形面積最小值為 __㉙__ 。

I. 已知 A、B、C 為圓 O 上的三點，O 為圓心，若 $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，則 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的夾角為 __㉚㉛__ 度。

J. 在 ΔABC 中，內角 A、B、C 的對邊分別為 a、b、c 且 $a>c$。已知 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2$，$\cos B=\frac{1}{3}$，$b=3$，則 $a-b+c=$ __㉜__ 。

參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. 平面上，兩點 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

   點 (x_0,y_0) 到直線 $ax+by+c=0$ 的距離為 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3. ΔABC 的和角公式：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

   差角公式：$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

   倍角公式：$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

4. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，$R$ 為 ΔABC 的外接圓半徑

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5. 等差數列 $\langle a_n\rangle$ 的前 n 項和為 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n\left[2a_1+(n-1)d\right]}{2}$，其中 d 為公差

6. 相關係數：資料 X：$x_1,x_2,\cdots,x_n$，資料 Y：$y_1,y_2,\cdots,y_n$，則 X、Y 的相關係數

   $$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}}$$，其中 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，$\overline{y}=\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$

7. 算幾不等式

   (1) 設 $a\ge 0$、$b\ge 0$，則 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

   (2) 當 $a=b$ 時，$\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$；當 $a\ne b$ 時，$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

8. Y 對 X 的迴歸直線為 $y=\mu_Y+r\times\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$，其中 X 與 Y 的相關係數 r，算術平均數 μ_X、μ_Y，標準差 σ_X、σ_Y

9. $\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 7\approx 0.8451$

全國公私立高級中學104學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：104年11月5~6日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	3	2	4	1235	135	13	24	145	13	–	1	1	1	2
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
4	0	9	8	7	0	5	6	8	1	7	2	3	4	9
31	32													
0	2													

第壹部分：選擇題

一、單選題

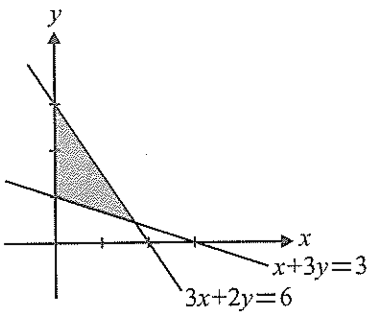
1. 因為 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分別是實係數偶函數和奇函數
   令 $f(x)=x^2+1$ ， $g(x)=-x^3$
   故 $f(1)+g(1)=1$
2. 當 $n\geq 2$ ， a_n 是第一個數為 $2n-3$ 的連續 n 個奇數的和
   所以 $a_n=(2n-3)+(2n-1)+\cdots+(4n-5)=3n^2-4n$
   則 $a_{2016}=3\times 2016^2-4\times 2016$
   故個位數字為 4
3. 設 $\overline{CD}=h$ ，則 $\tan\alpha=\dfrac{h}{35}$ ， $\tan\beta=\dfrac{h}{80}$
   因為 $\alpha\geq 2\beta$ 且 $0<2\beta\leq\alpha<90°$ ，所以 $\tan\alpha\geq\tan 2\beta$
   則 $\dfrac{h}{35}\geq\dfrac{2\times\frac{h}{80}}{1-(\frac{h}{80})^2}\Rightarrow h^2\leq 800\Rightarrow 0<h\leq 20\sqrt{2}$
   故 h 的最大值為 $20\sqrt{2}\approx 28.28$ ，$\therefore\overline{CD}$ 接近 28
4. $\dfrac{xy+3y}{2}\geq\sqrt{3xy^2}\Rightarrow\dfrac{15}{2}\geq\sqrt{3xy^2}$
   故 $xy^2\leq\dfrac{75}{4}$

二、多選題

5. $|x-1|\leq 3\Rightarrow -2\leq x\leq 4$ ， $|2y+7|\leq 3\Rightarrow -5\leq y\leq -2$
   (1) $0\leq x-y\leq 9$
   (2) $-20\leq xy\leq 10$
   (3) $-2\leq\dfrac{x}{y}\leq 1$
   (4) $0\leq x^2\leq 16$
   (5) $4\leq y^2\leq 25$
   故選(1)(2)(3)(5)
6. (1) 此多項式為滿足 $f(-1)=1$，$f(1)=5$，$f(3)=9$，$f(0)=a$ 的拉格朗日插值多項式
   (2) 當 $a=3$ 時，$f(x)$ 為一次多項式；當 $a\neq 3$ 時，$f(x)$ 為三次多項式
   (3) 對任意的實數 a ， $f(x)$ 恆為奇數次多項式，故有實數解
   (4) 當 $a=10$ ， $f(2)=0$ ，故在 1 與 3 之間亦有實根
   (5) 設 $g(x)$ 除以 $x(x+1)(x-1)(x-3)$ 的餘式為 $h(x)$
   則 $h(x)$ 為不超過三次的實係數多項式
   由餘式定理可知 $h(x)$ 滿足 $h(-1)=1$ ， $h(1)=5$ ， $h(3)=9$ ， $h(0)=a$ ，故 $h(x)=f(x)$
   故選(1)(3)(5)
7. (1) $y=-\log_{2016}x=\log_{\frac{1}{2016}}x$ ， $y=2016^{-x}=(\dfrac{1}{2016})^x$
   所以當點 (x_0,y_0) 在 $y=-\log_{2016}x$ ，點 (y_0,x_0) 在 $y=2016^{-x}$
   即兩圖形對稱於直線 $y=x$
   (2) $y=\log_{2016}x$ 恆在 $y=2016^x$ 下方，故兩圖形無交點
   (3) $y=2016^x$ 為遞增函數，故斜率恆為正
   (4) 因為圖形與 x 軸是否相交，相當於方程組
   $\begin{cases}y=\log_{2016}(x^2-12x+40)\cdots\cdots ①\\ y=0\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots ②\end{cases}$ 是否有實數解
   得 $\log_{2016}(x^2-12x+40)=0\Rightarrow x^2-12x+39=0$
   因為判別式 $(-12)^2-4\cdot 1\cdot 39=-12<0$ ，所以 x 為無實數解
   因此圖形與 x 軸不相交
   (5) 兩圖形相交於 $(0,1)$
   故選(1)(3)
8. (1)(2)(3) $a=\log_3 6=1+\log_3 2$ ， $b=\log_5 10=1+\log_5 2$
   $c=\log_7 14=1+\log_7 2$
   因為 $\log_3 2>\log_5 2>\log_7 2$ ，所以 $a>b>c$
   (4) $\log_3 6-1.5=\log_3 6-\log_3 3^{\frac{3}{2}}$
   因為 $6^2>3^3$ ，所以 $a>1.5$
   (5) $\log_7 14-1.5=\log_7 14-\log_7 7^{\frac{3}{2}}$
   因為 $14^2<7^3$ ，所以 $c<1.5$
   故選(2)(4)
9. (1) $\dfrac{0.6-0.6\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 0.6}{0.6}=1-0.5\cdot 0.5\cdot 0.6=1-0.15=0.85$
   (2) $\dfrac{0.6(0.5\cdot 0.5\cdot 0.6+0.5\cdot 0.5\cdot 0.4+0.5\cdot 0.5\cdot 0.4+0.5\cdot 0.5\cdot 0.4)}{0.6}$
   $=0.5\cdot 0.5\cdot 0.6+0.5\cdot 0.5\cdot 0.4+0.5\cdot 0.5\cdot 0.4+0.5\cdot 0.5\cdot 0.4=0.45$
   (3) $\dfrac{0.6(0.5\cdot 0.5\cdot 0.6+0.5\cdot 0.5\cdot 0.6+0.5\cdot 0.5\cdot 0.4)}{0.6}$
   $=0.5\cdot 0.5\cdot 0.6+0.5\cdot 0.5\cdot 0.6+0.5\cdot 0.5\cdot 0.4=0.4$
   (4) $\dfrac{0.5(0.6\cdot 0.5\cdot 0.6+0.4\cdot 0.5\cdot 0.6+0.4\cdot 0.5\cdot 0.4)}{0.5}$
   $=0.6\cdot 0.5\cdot 0.6+0.4\cdot 0.5\cdot 0.6+0.4\cdot 0.5\cdot 0.4=0.38$
   (5) $\dfrac{0.6\cdot 0.5-0.6\cdot 0.5\cdot 0.5\cdot 0.6}{0.6\cdot 0.5}=1-0.5\cdot 0.6=1-0.3=0.7$
   故選(1)(4)(5)
10. (1)(2) y 對 x 的迴歸直線為 $y-75=0.8\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-70)$
    點 $(10,35)$ 代入得 $0.8\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{2}{3}$ ，故斜率為 $\dfrac{2}{3}$
    (3)(4) $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{5}{6}$ ，故 $\sigma_x=\sigma_y\dfrac{6}{5}=1.2\sigma_y$
    (5) 相關性不代表有因果關係
    故選(1)(3)

第貳部分：選填題

A. 直線 $y=kx+2$ 恆過一定點 $(0,2)$ ，因為面積比為 1：1
所以 $y=kx+2$ 必過 $x+3y=3$ 、 $3x+2y=6$ 的交點座標 $(\dfrac{12}{7},\dfrac{3}{7})$ ，故 $k=-\dfrac{11}{12}$



B. 因爲 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{60}$ 爲等比數列且公比爲 r

所以 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{60} = {a_1}^{60} r^{1+2+\cdots+59} = {a_1}^{60} r^{\frac{60\cdot 59}{2}}$

則 $r^{60} = {a_1}^{60} r^{\frac{60\cdot 59}{2}} \Rightarrow a_1 = r^{\frac{-57}{2}}$

$a_3 \cdot a_6 \cdot a_9 \cdot \ldots \cdot a_{60} = {a_1}^{20} r^{2+5+8+\cdots+59}$

$= {a_1}^{20} r^{\frac{61\cdot 20}{2}} = (r^{\frac{-57}{2}})^{20} r^{\frac{61\cdot 20}{2}} = r^{40}$

故 $n = 40$

C. 因爲國文系有 3 名同學，所以分成兩個情況討論

情況一：選出的 3 名同學中有 1 名爲國文系

則有 $C_1^3 C_2^7 = 63$ 種

情況二：選出的 3 名同學中沒有人國文系

則有 $C_3^7 = 35$ 種

因此有 98 種選法

D. $(\frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}})^8$ 的第 n 項爲 $C_n^8 (\frac{x}{\sqrt{y}})^n (\frac{-y}{\sqrt{x}})^{8-n}$

$= C_n^8 (-1)^{8-n} x^{\frac{3n}{2}-4} y^{8-\frac{3n}{2}}$

其中 $0 \le n \le 8$

$(\frac{x}{\sqrt{y}})^n (\frac{y}{\sqrt{x}})^{8-n} = x^{\frac{3n}{2}-4} y^{8-\frac{3n}{2}}$，$x^2y^2 = x^{\frac{3n}{2}-4} y^{8-\frac{3n}{2}} \Rightarrow n = 4$

因此 x^2y^2 的係數爲 $C_4^8(-1)^4 = 70$

E. 情況分爲甲 2 局贏得比賽、甲 3 局贏得比賽及甲 4 局贏得比賽

情況一：甲 2 局贏得比賽

甲第 1 局及第 2 局皆贏，機率爲 $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$

情況二：甲 3 局贏得比賽

甲第 1 局輸，第 2 局及第 3 局皆贏，機率爲 $\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{27}$

情況三：甲 4 局贏得比賽

甲第 1 局贏，第 2 局輸，第 3 局及第 4 局皆贏，機率爲

$\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{81}$

故甲在 4 局以內(含 4 局)贏得比賽的機率爲 $\frac{56}{81}$

F. y 對 x 的迴歸直線方程式爲 $y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$

設性向測驗成績標準差爲 σ_1，成就測驗成績標準差爲 σ_2

則 $0.81 = r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$，$0.64 = r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

兩式相乘得 $r^2 = \frac{81}{100} \times \frac{64}{100} \Rightarrow r = \frac{72}{100} = 0.72$

則性向測驗成績及成就測驗成績的相關係數爲 0.72

因此 $100r = 72$

G. $\cos\angle BAD = -\frac{\sqrt{7}}{14}$，則 $\sin\angle BAD = \frac{3\sqrt{21}}{14}$

由餘弦定理得 $\cos\angle CAD = \frac{4}{2\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$，則 $\sin\angle CAD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$\sin\angle BAC = \sin(\angle BAD - \angle CAD) = \frac{3\sqrt{21}}{14} \times \frac{2}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{14} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

由正弦定理 $\frac{\overline{AC}}{\sin\angle CBA} = \frac{\overline{BC}}{\sin\angle BAC}$

得 $\overline{BC} = \sqrt{7}\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{6}} = \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{6}{\sqrt{21}} = 3$

H. 設圓切線的 x 截距爲 a，y 截距爲 b，其中 a 、b 皆大於 0

則切線方程式爲 $bx + ay = ab$

圓 $x^2 + y^2 = 4$ 的圓心 O 爲 $(0, 0)$，半徑爲 2

圓心 O 到切線的距離等於半徑

故 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{a^2b^2}{8}$

三角形面積爲 $\frac{ab}{2}$

因爲 a^2 、b^2 皆大於 0，由算幾不等式

得 $\frac{a^2+b^2}{2} \ge \sqrt{a^2b^2} \Rightarrow \frac{a^2b^2}{8} \ge ab \Rightarrow \frac{ab}{2} \ge 4$

因此三角形面積最小值爲 4

I. $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

由向量的分點公式可知 O 爲 B 、C 的中點

則 $\overline{BC}$ 爲圓的直徑

因此 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的夾角爲 90°

J. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overline{BA}\,\overline{BC}\cos B = ac\frac{1}{3}$

得 $ac = 6$ ……①

由餘弦定理

$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{a^2+c^2-9}{12} \Rightarrow a^2+c^2 = 13$ ……②

由①②解得 $a = 3$，$c = 2$

故 $a - b + c = 2$