全國公私立高級中學

104學年度學科能力測驗第一次聯合模擬考試

考試日期：104年7月28~29日

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

題型題數：單選題7題，多選題5題，選填題第A至H題共8題

作答方式：用2B鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第B題的答案格式是$\frac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是$\frac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第18列的$\overset{3}{□}$與第19列的$\overset{8}{□}$畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第C題的答案格式是$\frac{⑳㉑}{50}$，而答案是$\frac{-7}{50}$時，則考生必須分別在答案卡的第20列的$\overset{-}{□}$與第21列的$\overset{7}{□}$畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題（占 60 分）

一、單選題（占 35 分）

說明：第 1 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 a、b 皆爲大於 0 的實數，已知 $2a+b=6$，求 $3ab$ 的最大值爲：

(1) 9

(2) $\frac{9}{2}$

(3) $\frac{27}{2}$

(4) 18

(5) 27

2. 設函數 $f(x)=2\cdot(4x^2-3x-5)$，其中 $1\le x\le 3$，則函數 $f(x)$ 的最小值爲：

(1) $-\frac{89}{8}$

(2) -8

(3) $-\frac{89}{16}$

(4) -10

(5) -4

3. 設 x 爲整數，則滿足不等式 $\sqrt{x+6}>x$ 的 x 值有幾個？

(1) 3

(2) 4

(3) 7

(4) 8

(5) 9

4. 設 $f(x)=x^4-3x^3+12x^2-5x-6$，則 $f(1-3i)=$？

(1) $-1-15i$

(2) $-1+15i$

(3) $5-6i$

(4) $5+6i$

(5) $1-15i$

5. 設 a、b 爲實數，若不等式 $|ax-1|\le b$ 的解爲 $-5\le x\le 2$，則數對 $(a,b)=$？

(1) $(\frac{2}{3},\frac{7}{3})$

(2) $(-\frac{2}{3},\frac{7}{3})$

(3) $(-\frac{2}{3},-\frac{7}{3})$

(4) $(\frac{7}{3},-\frac{2}{3})$

(5) $(\frac{7}{3},\frac{2}{3})$

6. 求 $\dfrac{\log_2 5+\log_4 3}{\log_2\sqrt{5}}$ 之值爲：

(1) $\log_4 70$

(2) $\log_4 23$

(3) $\log_2\sqrt{15}$

(4) $2+\log_5 3$

(5) $5+\log_5 3$

7. 下列哪個 m 值可以使得方程式 $3\cdot 16^x-2m\cdot 4^x-m+6=0$ 有兩相異實根？

(1) -7

(2) 2

(3) 3

(4) 4

(5) 7

二、多選題（占 25 分）

說明：第 8 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8. 不等式 $x(x-2)(x+3)\le 0$ 的解與下列哪些相同？

(1) $x^2(x-2)(x+3)\le 0$

(2) $\dfrac{x(x+3)}{x-2}\le 0$

(3) $\dfrac{x(x+3)(x^2-4)}{x+2}\le 0$

(4) $x(x-2)^3(x+3)(x^2+1)\le 0$

(5) $(x^2+x-6)(x^5+6x^3+9x)\le 0$

9. 設多項式函數 $f(x)=x^6+3x^2-6$，請選出正確的選項。

(1) 多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式爲 -2

(2) 多項式 $f(x)$ 除以 x^2-1 的餘式爲 $x-2$

(3) 方程式 $f(x)=0$ 在 1 與 2 之間必定至少存在一實根

(4) 若 $g(x)=x-\dfrac{3}{2}$，則方程式 $f(x)\cdot g(x)=0$ 在 1 與 2 之間必定至少存在一實根

(5) 已知方程式 $f(x)=x^6+3x^2-6=3^x+3^{-x}$ 有四個相異實根，則此四相異實根之和恰爲 0

10. 設 $f(x)=x^4+ax^2+bx+c$，其中 a，b，c 爲實數。已知 $f(x)$ 除以 x^2+1 得餘式爲 $2x+1$；$f(x)$ 除以 $x+1$ 得餘式爲 5，請選出正確的選項。

(1) $a-b+c=-4$

(2) $a=c$

(3) $a=3$

(4) $b=2$

(5) $c=-3$

11. 關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $0.8^{\frac{1}{6}}<0.9^{\frac{1}{6}}$

(2) $0.8^{-\frac{1}{6}}<0.9^{-\frac{1}{6}}$

(3) $8^{\frac{1}{6}}<9^{\frac{1}{6}}$

(4) $0.3^{0.8}<0.3^{0.9}$

(5) $3^{-0.8}<3^{-0.9}$

12. 設 $a>0$ 且 $a\neq 1$，考慮函數 $f(x)=a^x$， $g(x)=\log_a x$，請選出正確的選項。

(1) 若 $f(2)=5$，則 $g(125)=6$

(2) 方程式 $f(x)=x^2$ 恰有兩相異實數解

(3) 一新函數 $y=f(x)-1$ 的圖形必通過原點

(4) 函數 $y=f(x)$ 的圖形可經由旋轉、平移後得到 $y=g(x)$ 的圖形

(5) 設直線 $y=x+3$ 與 $y=f(x)$ 的圖形有兩個交點，則直線 $y=x-3$ 與 $y=g(x)$ 也會有兩個交點

第貳部分：選填題（占 40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號(13–36)。
2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 設 $-2 \le x \le 3$，$1 \le y \le 4$，若 $xy+y$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，
則數對 $(M, m) = (\underline{⑬⑭, ⑮⑯})$。

B. 設正實數 a 的小數部分爲 $b(0<b<1)$，且 $3a^2-2b^3=41$，求 $a=$ ⑰$+\sqrt{⑱}$。

C. 設多項式 $f(x)=a\cdot x\cdot(x-1)+b(x-1)(x-2)+c(x+1)$，其中 a、b、$c\in R$。
若 $f(0)=f(3)=f(-2)=1$，求 $8a+2b+c=$ ⑲⑳ 。

D. 設多項式 $f(x)=1\cdot\dfrac{(x-2)(x-\sqrt{2})}{(1-2)(1-\sqrt{2})}+4\cdot\dfrac{(x-1)(x-\sqrt{2})}{(2-1)(2-\sqrt{2})}+2\cdot\dfrac{(x-1)(x-2)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}$，求 $f(5)=$ ㉑㉒ 。

E. 設 $a\in R$。在坐標平面上，拋物線 $y=(a^2-1)x^2+ax+(a^2-a-6)$ 的圖形經過四個象限，求 a 之範圍爲 ㉓㉔$<a<$㉕㉖，㉗$<a<$㉘ 。

F. 坐標平面上，設 A、B 兩點分別落在函數 $y=3^x$ 與 $y=2\cdot 3^x$ 的圖形上，且 $\overline{AB}$ 平行 y 軸，又 $\overline{AB}=7$，則 B 點的 y 坐標為 ㉙㉚。

G. 試利用下面的對數表求出 $\sqrt[3]{\dfrac{3.39}{479}}$ 的近似值為 ㉛.㉜㉝。(四捨五入到小數點後第二位)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7167	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

H. 依依電腦公司研發出一個測螢幕雜訊的方法。假設某螢幕的每平方公分有 n 個雜訊點，則其「雜訊程度」$r(n)$ 定義為 $r(n)=1+\dfrac{1}{5}\log_4 n$；現已知 A 螢幕其雜訊程度為 67.3，B 螢幕其雜訊程度為 48.1，若 A 螢幕每平方公分的雜訊點為 B 螢幕的 k 倍，則 k 的整數部分為 ㉞㉟ 位數；首位數字為 ㊱。

參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解： $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
2. 平面上兩點 $P_1(x_1\,,y_1)$ ， $P_2(x_2\,,y_2)$ 間的距離 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
3. 通過 $(x_1\,,y_1)$ 與 $(x_2\,,y_2)$ 的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ， $x_2\neq x_1$
4. 算幾不等式：已知 $a>0$ 且 $b>0$，則 $\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ ；當 $a=b$ 時，等號成立
5. 對數值： $\log_{10}2\approx 0.3010$ ， $\log_{10}3\approx 0.4771$ ， $\log_{10}7\approx 0.8451$

全國公私立高級中學 104 學年度學科能力測驗第一次聯合模擬考試

數學考科解析

考試日期：104 年 7 月 28~29 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	2	5	1	2	4	4	345	1345	234	13	135	1	6	–
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
4	2	3	–	1	2	5	–	2	–	1	1	3	1	4
31	32	33	34	35	36									
0	1	9	5	8	6									

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 由算幾不等式知 $\dfrac{2a+b}{2}\geq\sqrt{2ab}$，故 $\sqrt{2ab}\leq 3$，$ab\leq\dfrac{9}{2}$

   $3ab\leq\dfrac{27}{2}$ 當 $2a=b=3$ 時等號成立

2. $f(x)=2\cdot(4x^2-3x-5)=8x^2-6x-10$

   其圖形頂點在 $x=\dfrac{-(-6)}{2\cdot 8}=\dfrac{3}{8}$ 時，但因 $1\leq x\leq 3$

   故最小值爲 $f(1)=8-6-10=-8$

3. 當 $x\geq 0$ 時，$\sqrt{x+6}>x\Rightarrow x+6>x^2\Rightarrow(x-3)(x+2)<0$

   $\Rightarrow -2<x<3\Rightarrow 0\leq x<3$

   當 $x<0$ 時，$x+6\geq 0\Rightarrow x\geq -6\Rightarrow -6\leq x<0$

   合併可得 $-6\leq x<3$，故有 9 個

4. $1-3i$ 爲 $x^2-2x+10=0$ 的一根

   利用長除法計算 $x^4-3x^3+12x^2-5x-6$ 除以 $x^2-2x+10$

   可得商式 x^2-x，餘式 $5x-6$

   故 $f(x)=(x^2-2x+10)(x^2-x)+(5x-6)$

   $\Rightarrow f(1-3i)=0+5(1-3i)-6=-1-15i$

5. $-5\leq x\leq 2$ 爲不等式 $\left|x+\dfrac{3}{2}\right|\leq\dfrac{7}{2}$ 的解，將此不等式同乘 $\dfrac{2}{3}$ 得

   $\left|\dfrac{2}{3}x+1\right|\leq\dfrac{7}{3}$，即 $\left|-\dfrac{2}{3}x-1\right|\leq\dfrac{7}{3}$

6. $\dfrac{\log_2 5+\log_4 3}{\log_2\sqrt{5}}=\dfrac{\log_4 25+\log_4 3}{\log_4 5}=\dfrac{\log_4 75}{\log_4 5}=\log_5 75$

   $=\log_5 25+\log_5 3=2+\log_5 3$

7. 令 $t=4^x$，原方程式爲 $3t^2-2m\cdot t+(-m+6)=0$

   若要原方程式的 x 有兩相異實根，則 t 需有兩相異正根

   須滿足下列三個條件

   ①判別式 >0，②兩根相加 >0，③兩根相乘 >0

   對 t 來說，其判別式爲

   $4m^2-4\cdot 3\cdot(-m+6)=4(m^2+3m-18)=4(m-3)(m+6)$

   判別式 >0 則 $m>3$ 或 $m<-6$

   又 $\dfrac{2m}{3}>0\Rightarrow m>0$，$\dfrac{-m+6}{3}>0\Rightarrow m<6$

   合併爲 $3<m<6$

二、多選題

8. 題目的解爲 $x\leq -3$ 或 $0\leq x\leq 2$

   (1) 解爲 $-3\leq x\leq 2$

   (2) $x=2$ 不合

   (4) 因爲 x^2+1 恆正，故 $x(x-2)^3(x+3)(x^2+1)\leq 0$ 的解與 $x(x-2)(x+3)\leq 0$ 相同

   (5) $(x^2+x-6)(x^5+6x^3+9x)\leq 0\Rightarrow(x+3)(x-2)x(x^2+3)\leq 0$

   又 x^2+3 恆正，其解與 $x(x-2)(x+3)\leq 0$ 相同

9. (1) $f(1)=1+3-6=-2$

   (2) x^2 用 1 代入得 $1^3+3\cdot 1-6=-2$，故餘式爲 -2

   (3) 因爲 $f(1)=-2$ 且 $f(2)=70$，由勘根定理可知 $f(x)=0$ 在 1 與 2 之間必定至少存在一實根

   (4) $f(x)=0$ 的根就一定也是 $f(x)\cdot g(x)=0$ 的根

   (5) 因爲 $f(x)$ 的圖形對稱 y 軸，而 $y=3^x+3^{-x}$ 的圖形也是對稱 y 軸，若有交點，則其交點必也對稱 y 軸，故其和爲 0

10. $x^4+ax^2+bx+c=(x^2+1)(px^2+qx+r)+2x+1$

    右式中 x^4 的係數爲 p，故 $p=1$；x^3 的係數爲 q，故 $q=0$，又 $f(-1)=5$ 代入，可得 $r=2$

    $f(x)=(x^2+1)(x^2+2)+2x+1=x^4+3x^2+2x+3$

    故 $a=3$，$b=2$，$c=3$

11. (1)(2) 可畫出 $y=0.8^x$ 與 $y=0.9^x$ 的圖形做比較，或是取 log 後做比較

    (3) $\sqrt[6]{8}<\sqrt[6]{9}$

    (4) $y=0.3^x$ 圖形爲遞減，因 $0.8<0.9$ 故 $0.3^{0.8}>0.3^{0.9}$

    (5) $y=3^x$ 圖形爲遞增，因 $-0.8>-0.9$，故 $3^{-0.8}>3^{-0.9}$

12. (1) $f(2)=a^2=5\Rightarrow a=\sqrt{5}$，$g(125)=\log_{\sqrt{5}}125=6$

    (2) 不一定，例如 $2^x=x^2$ 有三相異實數解

    (3) 因爲 $y=f(x)$ 的圖形必過 $(0,1)$，故 $y=f(x)-1$ 的圖形必過原點

    (4) $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 圖形是對稱於直線 $x=y$，要經由鏡射才可能重合

    (5) 因爲 $y=x+3$ 與 $y=x-3$ 也對稱於 $x=y$

第貳部分：選填題

A. $-1\leq x+1\leq 4$，$1\leq y\leq 4$，故 $-4\leq(x+1)y\leq 16$

B. $0<b<1\Rightarrow 0<2b^3<2$，又 $3a^2=41+2b^3$

   $\Rightarrow 41<3a^2<43\Rightarrow a^2=13.\cdots$ 或 $14.\cdots\Rightarrow a=3.\cdots$

   故 $b=a-3$，代入 $3a^2-2b^3=41$，得 $3a^2-2(a-3)^3=41$

   化簡得 $2a^3-21a^2+54a-13=0$

   由一次因式檢驗法知

   $2a^3-21a^2+54a-13=(2a-13)(a^2-4a+1)$

   可解出 $a=\dfrac{13}{2},2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}$，又 $a=3.\cdots$，故 $a=2+\sqrt{3}$

C. 因爲 $f(0)=f(3)=f(-2)=1$

   故可設 $f(x)=q(x)\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x+2)+1$

   但因爲 $f(x)$ 最多爲二次式，故 $q(x)=0$，即 $f(x)=1$

   故 $a\cdot x\cdot(x-1)+b(x-1)(x-2)+c(x+1)=1$

   $x=1$ 代入，得 $c=\dfrac{1}{2}$；$x=0$ 代入，得 $b=\dfrac{1}{4}$

   $x=2$ 代入，得 $a=\dfrac{-1}{4}$；故 $8a+2b+c=-2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=-1$

D. 由拉格朗日插值多項式知 $f(x)$ 爲一通過 $(1,1)$、$(2,4)$、$(\sqrt{2},2)$ 之拋物線，即爲 $y=x^2$，故 $f(5)=25$

E. 拋物線會通過四個象限有兩種情形：

   ①開口向上且與 y 軸交點爲負、②開口向下且與 y 軸交點爲正

   ① $a^2-1>0\Rightarrow a>1,a<-1$

$a^2-a-6=(a-3)(a+2)<0 \Rightarrow -2<a<3$

故 $-2<a<-1$ ，$1<a<3$

② $a^2-1<0 \Rightarrow -1<a<1$

$(a-3)(a+2)>0 \Rightarrow a>3\ , a<-2$ 無解

F. 設 $A(\alpha\ , 3^{\alpha})$ ， $B(\alpha\ , 2\cdot 3^{\alpha})$ ，則 $\overline{AB}=3^{\alpha}=7$ ，故 $\alpha=\log_3 7$ ，

B 點的 y 坐標爲 $2\cdot 3^{\log_3 7}=14$

G. 令 $\sqrt[3]{\frac{3.39}{479}}=A$ ，則 $\log A=\frac{1}{3}(\log 3.39-\log 479)$

$=\frac{1}{3}(0.5302-2.6803)=-0.7167=-1+0.2833$

由查表得 $\log 1.92=0.2833$

故 $A=1.92\times 10^{-1}=0.192\approx 0.19$

H. 設 A 螢幕每平方公分的雜訊點有 a 個，B 螢幕有 b 個

則 $r(a)=1+\frac{1}{5}\log_4 a=67.3$ ； $r(b)=1+\frac{1}{5}\log_4 b=48.1$

兩式相減得 $\log_4 \frac{a}{b}=96$ ，故 $\frac{a}{b}=4^{96}$ ，即 $k=4^{96}$

$\log 4^{96}=96\log 4=96\times 0.6020=57.792$

故 k 爲 58 位數，首位數字爲 6