臺中區國立高級中學 103 學年度
大學入學第一次學科能力測驗聯合模擬考

數學考科

考試日期：103 年 11 月 3~4 日

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題(占 60 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 下列哪個方程式恰有一實數解？
   (1) $2^{|x|}=x^2$
   (2) $2^x=\log_2 x$
   (3) $4^x=x^4$
   (4) $2^{|x|}=2x$
   (5) $(\frac{1}{2})^x=\log_{\frac{1}{2}} x$

2. 某生物實驗室對一個地區進行果蠅繁殖的生態調查，他們對該地區的果蠅密度用一種數列 $\langle d_n\rangle$ 來呈現，其中 d_n 代表第 n 週後調查所得到的密度。生物學家發現該地區果蠅密度 d_n 符合以下規則：$d_n=\begin{cases} d_{n-1}+\frac{1}{2}，0\le d_{n-1}<\frac{1}{2} \\ 2-2d_{n-1}，\frac{1}{2}\le d_{n-1}\le 1 \end{cases}$。如果該地區第一週後的果蠅密度 $d_1=\frac{1}{10}$，則 52 週後(一年後)的密度值為：
   (1) $\frac{1}{5}$
   (2) $\frac{2}{5}$
   (3) $\frac{3}{5}$
   (4) $\frac{4}{5}$
   (5) $\frac{7}{10}$

3. xy 平面上，若二直線 $L: 3x+4y=23$ 和 $M: \begin{cases} x=12t-1 \\ y=at+3 \end{cases}$ (t 為實數)交角之正弦值為 $\frac{4}{5}$，則 $a=$？

(1) $-\frac{7}{2}$

(2) -3

(3) 3

(4) $\frac{7}{2}$

(5) $\frac{5}{2}$

4. xy 平面上，設直線 L： $4x-3y-5=0$ 與圓 C： $x^2+y^2-2tx+6y+10=0$ 相切，則 t 值在下列哪一個區間範圍內？

(1) $(-4,-3)$

(2) $(-2,-1)$

(3) $(0,1)$

(4) $(2,3)$

(5) $(4,5)$

5. 下列哪一個選項<u>無法</u>找到實數 a，使得選項中所有的數都滿足五次不等式 $(103x-2014)(-x^2+x-1)[x^2+(a-3)x-3a]<0$？

(1) $103, 2014$

(2) $10, 20, 40, 80, 160$

(3) $1, 11, 21, 31, 41$

(4) $0, 20, 40, 60, 80, 100, \cdots\cdots$

(5) $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, \cdots\cdots$

6. 設 $(1+\sqrt{2})^7=a+b\sqrt{2}$，其中 a、b 為整數，請問 a^2-2b^2 等於下列哪一個選項？

(1) -1

(2) 0

(3) 1

(4) 2

(5) 3

二、多選題(占 30 分)

說明：第 7 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 已知 p、q、n 為正整數，且方程式 $x^3+px^2+qx+2^n=0$ 有一虛根為 $1+\sqrt{15}i$，則下列哪些選項是正確的？

(1) $1-\sqrt{15}i$ 必為該方程式之一根

(2) 此方程式必有一正實根

(3) $p=2$

(4) $p+q=10$

(5) n 為質數

8. 若正實數 x、y 滿足 $\log_3 x=1.7$，$\log_3 y=5.1$，則下列哪些選項是正確的？

(1) x^{10} 為 9 位數

(2) x^{10} 個位數字為 9

(3) $\log_3(x^3+2y)=6.1$

(4) x^3+2y 的最高位數字為 9

(5) $x^{10}+y^3$ 為 9 位數

9. 已知 a、b、c 為相異三實數，且

$$f(x)=\frac{1-a}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c)+\frac{1-b}{(b-c)(b-a)}(x-c)(x-a)+\frac{1-c}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)，$$

則下列哪些選項是正確的？

(1) $y=f(x)$ 有最小值

(2) $y=f(|x|)$ 有最大值

(3) $f(1.1^{0.9})>f(0.9^{1.1})>f(\log_{0.5}5)$

(4) $\sum_{k=1}^{10}f(k)f(1+k)=330$

(5) 對於任何一組數對 (a,b,c) 必可找到唯一一組實數對 (A,B,C)，使得 $f(x)=A(x-a)(x-b)+B(x-b)+C$

10. 已知大雄和靜香兩人同班，且知班上有男生 20 人，女生 10 人，今使用簡單隨機抽樣，選出 3 人出公差，則下列哪些選項是正確的？

(1) 已知選出的 3 人中有男有女，則大雄被抽中的機率大於靜香被抽中的機率

(2) 已知選出的三人同性別，則大雄被抽中的機率大於靜香被抽中的機率

(3) 抽樣的做法中，不管一次抽取 3 人或每次抽取一人逐次抽取，大雄和靜香兩人同時被抽中的機率相等

(4) 大雄和靜香兩人同時被抽中的機率大於 $\frac{1}{100}$

(5) 在大雄被抽中的條件下，靜香也被抽中的機率大於 $\frac{1}{10}$

11. 矩形 $OABC$，其中 $O(0,0)$，$A(2,1)$，B 在 y 軸的正向，設 $P(x,y)$ 為矩形邊上的動點，則下列哪些選項是正確的？

(1) B 點坐標為 $(0,5)$

(2) $\overline{OC}=2\overline{OA}$

(3) $3x+2y$ 在 A 點產生最大值

(4) $\frac{y}{x+1}$ 在 B 點產生最大值

(5) 滿足 $\sqrt{x^2+y^2}$ 為正整數值的點 $P(x,y)$ 共有 9 個

12. 甲、乙、丙、丁四人爲參加高三第一次模擬考，週末在家溫書，下面列出他們四人週末在家各科的溫書時間(小時)和成績(分)結果，如表所示。

甲	社會	國文	自然	英文	數學
溫書時間	2	4	5	3	1
成績	100	70	80	60	50

乙	社會	國文	自然	英文	數學
溫書時間	2	3	3.5	2.5	1.5
成績	90	60	70	50	40

丙	社會	國文	自然	英文	數學
溫書時間	1	3	4	2	0
成績	80	56	64	48	40

丁	社會	國文	自然	英文	數學
溫書時間	5	0	3	1	2
成績	90	40	70	50	60

則下列哪些選項是正確的？

(1) 四人成績標準差 $\sigma_{甲}$、$\sigma_{乙}$、$\sigma_{丙}$、$\sigma_{丁}$的大小關係爲：$\sigma_{甲}>\sigma_{乙}=\sigma_{丁}>\sigma_{丙}$

(2) 四人的成績與溫書時間均爲正相關

(3) 甲乙丙三人的成績與溫書時間之相關係數全相等

(4) 丁的成績與溫書時間之相關係數爲 1

(5) 甲乙丙三人成績對溫書時間的迴歸直線中最陡者爲乙

第貳部分：選填題(占 40 分)

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13–33)。
2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 若實係數二次函數 $f(x)=x^2+ax+b$ 在 $-3\le x\le 5$ 的範圍內，存在兩個相異的 x 值使 $f(x)$ 有相同最大值 3，則數對 $(a,b)=$(⑬⑭ , ⑮⑯⑰)。

B. 紅綠建設公司在臺中打算建造 10 層樓高的總部大樓，爲了突顯公司的特色，決定每層樓只能用紅色或綠色的油漆來粉刷，每層樓只用一個顏色，而且不能有連續兩層是紅色的，則他們有 ⑱⑲⑳ 種可能的粉刷方式。

C. 衛生單位長期針對甲、乙、丙三家食品工廠檢測是否含 A、B 兩種毒素，發現任何一家檢測出任一種毒素的機率皆爲 $\frac{1}{2}$，且甲、乙、丙三家食品對於檢測結果互不影響，若檢測出至少含一種毒素的工廠就算不合格。在某次檢測中，已知這三家工廠皆不合格，則恰兩家工廠皆驗出兩種毒素的機率爲 $\frac{㉑}{㉒}$。(化爲最簡分數)

D. 小胖、小美、小恩、小賢四人暑假去參加臺東熱氣球嘉年華活動，小胖、小美、小恩於鹿野高臺場地(視爲一水平地面)相異三處，同時以仰角 60°看到小賢搭熱氣球在空中向其他三人招手(不計三人身高)，若當時三人彼此之距離爲 90 公尺、150 公尺、210 公尺，試問此時小賢所搭熱氣球離鹿野高臺場地之高度爲 ㉓㉔㉕ 公尺。

E. 已知 ΔABC 中，$\overline{BC}=2$，點 D 在 $\overline{AC}$ 上且 $\overline{AD}=1$、$\overline{CD}=2$。若 $\angle BDC=2\angle A$，則 $\sin A=\frac{\sqrt{㉖}}{㉗}$。(化爲最簡根式)

F. ΔABC 內部有一點 P，使得 $2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$，若 $\overline{PB}=5$、$\overline{PC}=7$、$\overline{PA}=4$，則 ΔABC 之面積爲 ㉘㉙$\sqrt{㉚}$。(化爲最簡根式)

G. 設 x、y 爲正數且 $9x+4y=100$，則 $\frac{xy}{x+y}$ 的最大値爲 ㉛。

H. 維維分別在甲、乙兩家銀行各存 10 萬元。已知甲銀行年利率 13.4%，乙銀行年利率 5%，若每年複利計算一次，則最快 ㉜㉝ 年後(取整數年)由甲銀行得到的本利和至少爲從乙銀行得到本利和的 2 倍。

可能用到的參考公式及數值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解： $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
2. 平面上兩點 $P_1(x_1\,,y_1)$， $P_2(x_2\,,y_2)$ 間的距離爲 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
3. 點 $P(x_0\,,y_0)$ 至直線 L： $ax+by+c=0$ 之距離爲 $\dfrac{|\,ax_0+by_0+c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
4. 通過 $(x_1\,,y_1)$ 與 $(x_2\,,y_2)$ 的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$， $x_2\neq x_1$
5. ΔABC 的正弦定理： $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$
   ΔABC 的餘弦定理： $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
6. 二倍角公式： $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$， $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$
7. 一維數據 $X:x_1$， x_2，……， x_n，算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$，
   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}((\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2})-n\mu_X^{\,2})}$
8. 二維數據 $(X\,,Y):(x_1\,,y_1)$， $(x_2\,,y_2)$，……， $(x_n\,,y_n)$，相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$
   迴歸直線(最適合直線)方程式爲 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$
9. $\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$， $\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
10. 柯西不等式：已知 $a_1\,,a_2\,,b_1\,,b_2\in\mathbb{R}$，則 $(a_1^{\,2}+a_2^{\,2})(b_1^{\,2}+b_2^{\,2})\geq(a_1b_1+a_2b_2)^2$
11. 複利計算：本利和 $=$ 本金 $\times(1+\text{利率})^{\text{期數}}$
12. 參考數值： $\sqrt{2}\approx1.414$， $\sqrt{3}\approx1.732$， $\sqrt{5}\approx2.236$ ， $\sqrt{6}\approx2.449$， $\pi\approx3.142$
13. 對數值： $\log_{10}2\approx0.3010$， $\log_{10}3\approx0.4771$， $\log_{10}5\approx0.6990$， $\log_{10}7\approx0.8451$

臺中區國立高級中學103學年度大學入學第一次學科能力測驗聯合模擬考

數學考科解析

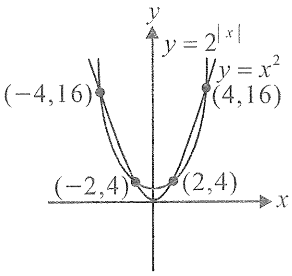
考試日期：103年11月3~4日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	2	4	5	3	1	134	135	245	23	125	2345	–	2	–
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	2	1	4	4	2	9	2	1	0	6	4	2	0	3
31	32	33												
4	1	0												

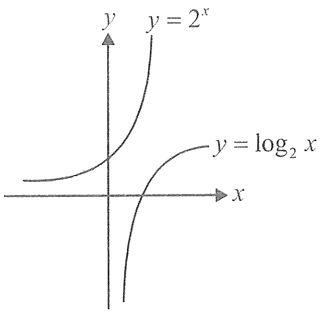
第壹部分：選擇題

一、單選題

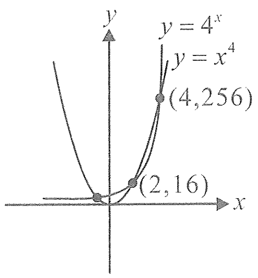
1. (1) 四交點



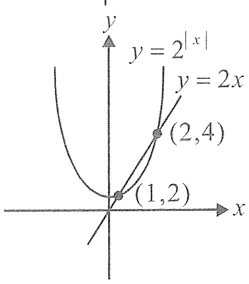
(2) 無交點



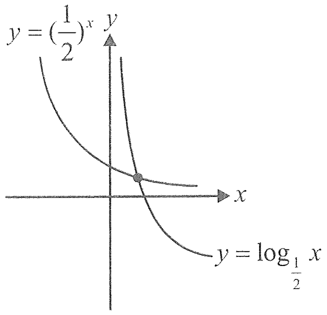
(3) 三交點



(4) 二交點



(5) 一交點



故選(5)

2. $d_1=\frac{1}{10}$，$d_2=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$，$d_3=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$，$d_4=2-\frac{8}{5}=\frac{2}{5}$

$d_5=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{9}{10}$，$d_6=2-\frac{9}{5}=\frac{1}{5}$，$d_7=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}$

$d_8=2-\frac{7}{5}=\frac{3}{5}$，……，故數列$\langle d_n\rangle$從第2項開始爲6個一循環的數列，所以$(52-1)\div 6=8\cdots 3$，故$d_{52}=\frac{2}{5}$

故選(2)

3. 直線M中消去t可化爲$ax-12y+(a+36)=0$，則直線L之法向量爲$\overrightarrow{n_L}=(3,4)$，直線$M$之法向量爲$\overrightarrow{n_M}=(a,-12)$

又$\sin\theta=\frac{4}{5}\Rightarrow\ \cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\frac{3}{5}$

其夾角θ滿足$\cos\theta=\pm\frac{\overrightarrow{n_L}\cdot\overrightarrow{n_M}}{|\overrightarrow{n_L}||\overrightarrow{n_M}|}=\pm\frac{3a-48}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{a^2+(-12)^2}}$

$=\pm\frac{3a-48}{5\sqrt{a^2+144}}$

可得$\frac{3a-48}{5\sqrt{a^2+144}}=\pm\frac{3}{5}\Rightarrow\frac{a-16}{\sqrt{a^2+144}}=\pm 1$

$\Rightarrow a^2-32a+256=a^2+144\Rightarrow a=\frac{112}{32}=\frac{7}{2}$

故選(4)

4. 圓C：$x^2+y^2-2tx+6y+10=0$

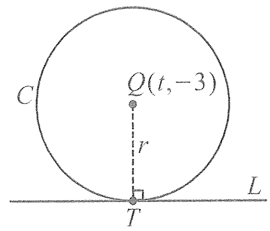
$\Rightarrow C:(x-t)^2+(y+3)^2=t^2-1>0$

$\Rightarrow t<-1$或$t>1$

即當$t<-1$或$t>1$時，

C爲圓心 $Q(t,-3)$，

半徑$r=\sqrt{t^2-1}$之圓，如右圖，



由L與C相切得：

$d(Q,L)=\frac{|4t+9-5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\sqrt{t^2-1}=r$

$\Rightarrow\frac{(4t+4)^2}{5^2}=t^2-1\Rightarrow 9t^2-32t-41=0$

$\Rightarrow(t+1)(9t-41)=0\Rightarrow t=-1$(不合)或$t=\frac{41}{9}\in(4,5)$

故選(5)

5. $(103x-2014)(-x^2+x-1)[x^2+(a-3)x-3a]<0$

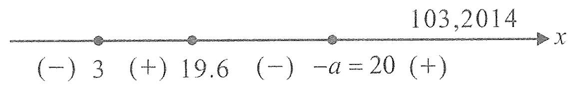
$\Rightarrow(103x-2014)(x^2-x+1)[x^2+(a-3)x-3a]>0$

其中x^2-x+1爲恆正，約去之

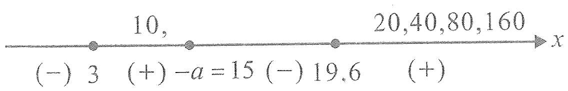
$\Rightarrow(x-\frac{2014}{103})[x^2+(a-3)x-3a]>0$，$\frac{2014}{103}\doteqdot 19.6$

$\Rightarrow(x-19.6)(x-3)[x-(-a)]>0$

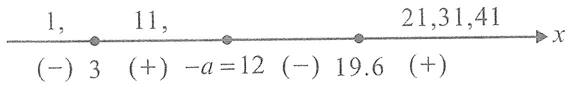
(1) 令$-a=20\Rightarrow a=-20$即可使$103,2014$皆滿足原不等式



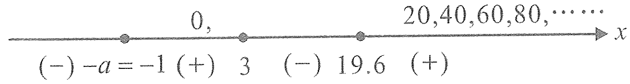
(2) 令$-a=15\Rightarrow a=-15$即可使$10,20,40,80,160$皆滿足原不等式



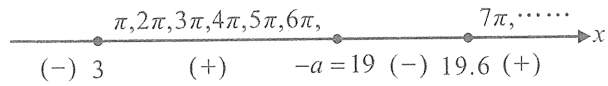
(3) 找不到任何一個實數 a 可使 $1,11,21,31,41$ 皆滿足原不等式



(4) 令 $-a=-1\Rightarrow a=1$ 即可使無窮數列
$0,20,40,60,80,100,\cdots\cdots$ 皆滿足原不等式



(5) 令 $-a=19\Rightarrow a=-19$ 即可使無窮數列
$\pi,2\pi,3\pi,4\pi,5\pi,6\pi,7\pi,\cdots\cdots$ 皆滿足原不等式



故選(3)

6. $\because (1+\sqrt{2})^7=a+b\sqrt{2}$ ，$a,b\in\mathbb{Z}$
$\therefore (1-\sqrt{2})^7=a-b\sqrt{2}$ 將二式相乘
$\therefore (-1)^7=a^2-2b^2=-1$
故選(1)

二、多選題

7. (1) 由虛根成對定理，$1-\sqrt{15}i$ 必爲該方程式之一根
(2) 設另一根爲 α，三根積 $16\alpha=-2^n\Rightarrow\alpha=-2^{n-4}<0$
(3)(4)(5) 由根與係數關係知：

$$\begin{cases}(1+\sqrt{15}i)+(1-\sqrt{15}i)+\alpha=-p\\(1+\sqrt{15}i)(1-\sqrt{15}i)+(1+\sqrt{15}i)\alpha+(1-\sqrt{15}i)\alpha=q\end{cases}$$

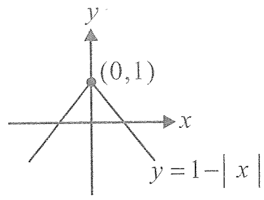
$$\Rightarrow\begin{cases}2+\alpha=-p\\16+2\alpha=q\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p=-2-\alpha=2^{n-4}-2>0\\q=16-2^{n-3}>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2^{n-4}>2\\2^{n-3}<16\end{cases}\Rightarrow 5<n<7\Rightarrow n=6\Rightarrow\begin{cases}p=2\\q=8\end{cases}\text{ 且 }\alpha=-4$$

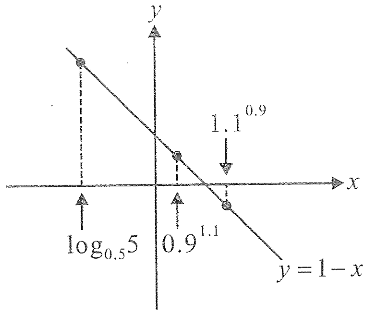
故選(1)(3)(4)

8. (1) $\because x^{10}=3^{17}\Rightarrow \log x^{10}=17\log 3=8.1107$ $\therefore x^{10}$ 爲 9 位數
(2) 3^k 之個位數字爲 3，9，7，1，3，9，7，1，……，每 4 個一循環，故 3^{17} 之個位數字爲 3
(3) $\log_3(x^3+2y)=\log_3(3^{5.1}+2\cdot 3^{5.1})=\log_3(3\cdot 3^{5.1})=6.1$
(4) 由(3)可知： $x^3+2y=3^{6.1}$
$\log(x^3+2y)=\log(3^{6.1})=6.1\times\log 3=2.91031=2+0.91031$
又 $\log 8<0.91031<\log 9$ $\therefore x^3+2y$ 的最高位數字爲 8
(5) $x^{10}+y^3=3^{17}+3^{15.3}$，由 $\log 3^{17}=8.1107$ 可知：3^{17} 爲 9 位數且最高位數字爲 1
$\log 3^{15.3}=7.29963$ 可知：$3^{15.3}$ 爲 8 位數且最高位數字爲 1
$\therefore x^{10}+y^3$ 爲 9 位數
故選(1)(3)(5)

9. $\because \deg f(x)\le 2$ 且 $f(a)=1-a$, $f(b)=1-b$, $f(c)=1-c$
$\therefore f(x)=1-x$
(1) $f(x)=1-x$ 無最小值
(2) $f(|x|)=1-|x|$ 爲折線圖，有最大值 1



(3) $\because 1.1^{0.9}>1$ ，$0<0.9^{1.1}<1$ ，$\log_{0.5}5<-2$
$\therefore 1.1^{0.9}>0.9^{1.1}>\log_{0.5}5$ ，又 $f(x)=1-x$ 遞減
$\therefore f(1.1^{0.9})<f(0.9^{1.1})<f(\log_{0.5}5)$



(4) $\sum_{k=1}^{10}f(k)f(1+k)=\sum_{k=1}^{10}(1-k)(-k)=\sum_{k=1}^{10}(k^2-k)$
$=\frac{10\times 11\times 21}{6}-\frac{10\times 11}{2}=330$
(5) 確實可找到唯一一組數組，$A=0$ ，$B=-1$ ，$C=1-b$
故選(2)(4)(5)

10. (1) 因 $P(\text{大雄}\,|\,\text{有男有女})=\frac{C_2^{10}+19\times 10}{n}$
$P(\text{靜香}\,|\,\text{有男有女})=\frac{C_2^{20}+20\times 9}{n}$ ，其中 $n=C_2^{20}C_1^{10}+C_1^{20}C_2^{10}$
$\therefore P(\text{大雄}\,|\,\text{有男有女})<P(\text{靜香}\,|\,\text{有男有女})$
(2) 因 $P(\text{大雄}\,|\,\text{同性別})=\frac{C_2^{19}}{m}$ ，$P(\text{靜香}\,|\,\text{同性別})=\frac{C_2^{9}}{m}$
其中 $m=C_3^{20}+C_3^{10}$
$\therefore P(\text{大雄}\,|\,\text{同性別})>P(\text{靜香}\,|\,\text{同性別})$
(3) 一次抽取 3 人，$P(\text{同時抽中})=\frac{28}{C_3^{30}}$
每次抽取一人，逐次抽取，$P(\text{同時抽中})=\frac{28\times 3!}{30\times 29\times 28}$ ，所以機率相等
(4) $P(\text{同時抽中})=\frac{28}{C_3^{30}}=\frac{1}{145}<\frac{1}{100}$
(5) $P(\text{靜香抽中}\,|\,\text{大雄抽中})=\frac{28}{C_2^{29}}=\frac{2}{29}<\frac{1}{10}$
故選(2)(3)

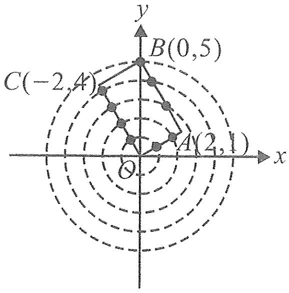
11. (1) 設 $B(0,k)$ ，又 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow(2,1)\cdot(-2,k-1)=0\Rightarrow k=5$
故 $B(0,5)$
(2) 由 $\overline{OB}$ 與 $\overline{AC}$ 之中點重合可得 $C(-2,4)$
則 $\overline{OC}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$ ，$\overline{OA}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$
$\Rightarrow\overline{OC}=2\overline{OA}$
(3) 令 $f(x,y)=3x+2y$ ，將 $A(2,1)$ 、$B(0,5)$ 、$C(-2,4)$ 、$O(0,0)$ 代入 $f(x,y)$，則得：
$f(2,1)=8$ 、$f(0,5)=10$ 、$f(-2,4)=2$ 、$f(0,0)=0$ ，故在 B 點產生最大值
(4) $\frac{y}{x+1}=\frac{y}{x-(-1)}\Rightarrow$ 表 (x,y) 與 $(-1,0)$ 兩點的斜率
當 $(x,y)=(-1,2)$ 或 $(-1,4.5)$ 時，(x,y) 與 $(-1,0)$ 兩點呈鉛直

線，故 $\dfrac{y}{x+1}$ 無最大值

(5) $\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$ 表 (x, y) 與 $(0, 0)$ 的距離，又 $0 \le \overline{OP} \le 5$，故可能產生的正整數值爲 $1, 2, 3, 4, 5$，當 $\sqrt{x^2+y^2}=5$ 時，矩形 $OABC$ 邊上恰只有一點 $B(0, 5)$ 滿足等式

當 $\sqrt{x^2+y^2}=1, 2, 3, 4$，矩形 $OABC$ 邊上皆有兩個點滿足等式

故共有 $4\times 2+1=9$ 個點



故選(1)(2)(5)

12. 設甲的溫書時間爲 x，成績爲 y，則乙的溫書時間爲 $\dfrac{1}{2}x+1$

成績爲 $y-10$，丙的溫書時間爲 $x-1$，成績爲 $0.8y$

(1) $\sigma_{甲}=\sigma_{乙}=\sigma_{丁}$，$\sigma_{丙}=0.8\sigma_{甲}$，所以 $\sigma_{甲}=\sigma_{乙}=\sigma_{丁}>\sigma_{丙}$

(2)(3)(4) $\because$ 甲的離均差乘積和 $\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$

$=(2-3)(100-72)+(4-3)(70-72)+(5-3)(80-72)$

$+(3-3)(60-72)+(1-3)(50-72)=30>0$

$\therefore$ 甲的相關係數 $r_{甲}>0$，由線性關係知：$r_{甲}=r_{乙}=r_{丙}>0$

又丁的資料(溫書時間 $x_{丁}$，成績 $y_{丁}$)完全落在直線

$y_{丁}=10x_{丁}+40$ 上，故相關係數爲 1，故四人的成績與溫書時間均爲正相關

(5) 由迴歸直線斜率 $m=\dfrac{r\sigma_Y}{\sigma_X}$ 知：$m_{乙}=2m_{甲}$，$m_{丙}=0.8m_{甲}$，

又 $m_{甲}>0$，所以斜率最大者爲 $m_{乙}$

故選(2)(3)(4)(5)

第貳部分：選填題

A. 令 $f(x)=(x-1)^2+k$

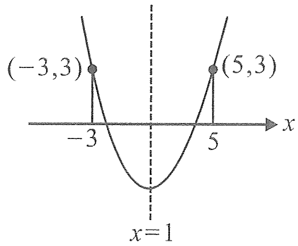
又過 $(-3, 3)$ 代入

得 $k=-13$

$\therefore f(x)=(x-1)^2-13$

$=x^2-2x-12$

$\therefore (a, b)=(-2, -12)$



B. 若每一層都是綠色的，則有 1 種粉刷方式；若其中有 1 層是紅色的，則有 $C_1^{10}=10$ 種粉刷方式；若其中有 2 層是紅色的，則以插空隙的方式可得有 $C_2^9=36$ 種粉刷方式；若其中有 3 層是紅色的，則以插空隙的方式可得有 $C_3^8=56$ 種粉刷方式；依此類推可得若其中有 4 層是紅色的，則有 $C_4^7=35$ 種粉刷方式，若其中有 5 層是紅色的，則有 $C_5^6=6$ 種粉刷方式

而依題意可知最多有 5 層爲紅色

故所求爲 $1+10+36+56+35+6=144$ 種方式

(另解)

設 a_n 表示 n 層樓高的粉刷方式 $\Rightarrow a_1=2, a_2=3, \cdots$

考慮第 10 層的顏色

1^0 紅 $\Rightarrow$ 第 9 層必爲綠色，故有 a_8 種方法

2^0 綠 $\Rightarrow$ 有 a_9 種方法

$\therefore a_{10}=a_9+a_8 \Rightarrow 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$

$\Rightarrow a_{10}=144$

C. 令 X：三家皆不合格，Y：恰二家有二種毒素

$$\Rightarrow P(Y\mid X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{C_2^3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{4})\times(1-\frac{1}{4})\times(1-\frac{1}{4})}=\frac{2}{9}$$

D. 因仰角相同

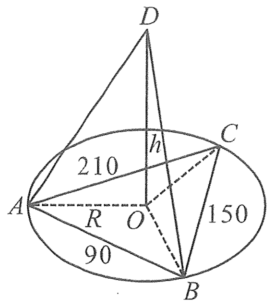
$\Rightarrow$ 三人距離熱汽球的投影點 O 等距

$\Rightarrow$ 三人同在一圓周上

設小胖在 A 點，小美在 B 點，小恩在 C 點，小賢在 D 點

$\overline{OA}=R$、$\overline{OD}=h$

$\because \dfrac{h}{R}=\tan 60^\circ \Rightarrow h=\sqrt{3}R$



又 $a\Delta ABC=\sqrt{225\times 15\times 75\times 135}$

$=15^3\sqrt{3}=\dfrac{210\times 150\times 90}{4R}$

$\therefore R=70\sqrt{3}$ $\quad\therefore h=210$

E. 如右圖，令 $\angle A=\theta$

則 $\angle BDC=2\theta=\angle A+\angle ABD$

$\Rightarrow \angle ABD=\theta$

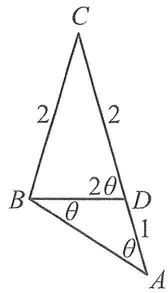
所以 $\overline{BD}=1$，故在 ΔBCD 中

由餘弦定理得：

$\cos 2\theta=\dfrac{2^2+1^2-2^2}{2\cdot 2\cdot 1}=\dfrac{1}{4}$

再由半角公式得：

$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}}=\sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{4}}{2}}=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$



F. $\because 2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PC}$

$\therefore |2\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|=|-\overrightarrow{PC}|$ 兩邊平方

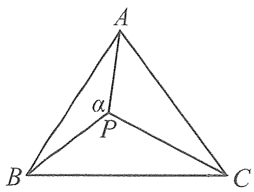
$\Rightarrow 4|\overrightarrow{PA}|^2+4\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+|\overrightarrow{PB}|^2=|\overrightarrow{PC}|^2$

$\Rightarrow 4\cdot 4^2+4\cdot 4\cdot 5\cdot\cos\alpha+5^2=7^2$

$\Rightarrow \cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha=120^\circ$

$\Rightarrow a\Delta APB=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot\sin 120^\circ=5\sqrt{3}$



$\because a\Delta APB：a\Delta APC：a\Delta BPC=1：1：2$

$\therefore a\Delta ABC=4(a\Delta APB)=20\sqrt{3}$

G. 由柯西不等式知

$[(\sqrt{9x})^2+(\sqrt{4y})^2][(\sqrt{\frac{1}{x}})^2+(\sqrt{\frac{1}{y}})^2]\ge(\sqrt{9x}\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}+\sqrt{4y}\cdot\sqrt{\frac{1}{y}})^2$

$\Rightarrow (9x+4y)(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})\ge 25 \Rightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\ge\dfrac{25}{100}=\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{x+y}{xy}\ge\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{xy}{x+y}\le 4$

得最大值爲 4

H. 設 n 年後，甲銀行的本利和 ≥ 2(乙銀行本利和)

$\Rightarrow 100000\times(1+13.4\%)^n\ge 2\times 100000\times(1+5\%)^n$

$\Rightarrow (\dfrac{1.134}{1.05})^n\ge 2\Rightarrow(1.08)^n\ge 2\Rightarrow n\log(1.08)\ge\log 2$

又 $\log 1.08=\log(108\times 10^{-2})=-2+\log(2^2\times 3^3)$

$=-2+2\log 2+3\log 3=0.0333$

$\Rightarrow n(0.0333)\ge 0.301\Rightarrow n\ge 9.03\cdots$

取 $n=10$