臺中區國立高級中學 102 學年度
大學入學第二次學科能力測驗聯合模擬考

數學考科

考試日期：102 年 12 月 23~24 日

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 6 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{\text{⑱}}{\text{⑲}}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡的第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{\text{⑳㉑}}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

第壹部分：選擇題(占 65 分)

一、單選題(占 30 分)

說明：第 1 題至第 6 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 若 $2^a=\log_{\frac{1}{2}}a$，$2^b=(\frac{1}{2})^b$，$(\frac{1}{2})^c=\log_2 c$，$(\frac{1}{2})^d=\log_{\frac{1}{2}}d$，$\log_2 e=\log_{\frac{1}{2}}e$，則下列敘述何者正確？

(1) $0\le a,b,c,d,e\le 1$

(2) $c<d<a<b<e$

(3) $c<d<a<e<b$

(4) $b<d<a<e<c$

(5) $b<a<d<e<c$

2. 平面上有八個點以極坐標表示分別寫成 $A_k[\sqrt{2},90°\times k-70°]$ 與 $B_k[3,90°\times k-25°]$，其中 $k=1,2,3,4$，若依序連接可得一八邊形 $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4$，其周長爲下列何值？

(1) $\sqrt{5}$

(2) $4\sqrt{7}$

(3) $6\sqrt{6}$

(4) $8\sqrt{5}$

(5) $8\sqrt{7}$

3. 已知 $A(3,2,1)$、$B(4,3,5)$、$C(5,5,7)$爲空間坐標中三點，設 $D(x,y,0)$爲 xy 平面上一點且滿足 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{18}=1$，試求四面體 $ABCD$ 體積之最大值爲何？

(1) 25

(2) $\frac{25}{3}$

(3) $\frac{25}{6}$

(4) 4

(5) 2

4. 已知 a、b、c 爲相異之正整數，且滿足 $abc=2310$，則集合 $\{a,b,c\}$ 共有幾個？

(1) 32

(2) 36

(3) 40

(4) 240

(5) 243

5. 已知 $-1\le x\le 5$，$-3\le y\le 3$，若 $xy+3x-y+2$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，則 $M-m=$

(1) 36

(2) 38

(3) 42

(4) 46

(5) 48

6. 設拋物線 $\Gamma: y^2=8x$ 的焦點爲 F，若 A、B 爲 Γ 上相異兩點且均在 x 軸上方，滿足 $\overline{AF}=5$，$\overline{BF}=3$，則 ΔABF 之面積爲下列何值？

(1) $2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$

(4) $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

(5) $\sqrt{3}-1$

二、多選題(占 35 分)

說明：第 7 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

7. 台中市政府有 400 位員工及家人參加員工自強活動，小胖統計報名表，辦理保險及分配用餐座位時，將參加人員的年紀 (x_i) 與出生西元年次 (y_i) 編成兩個數列，已知 $x_i+y_i=2013$，則下列有關年紀 (x_i) 與出生西元年次 (y_i) 的統計結果哪些正確？
   (1) 全距相等
   (2) 中位數相等
   (3) 標準差相等
   (4) 算術平均數相等
   (5) 相關係數 $=1$

8. 設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 為實係數三次多項式，則下列敘述哪些正確？
   (1) 若 $f(1-2i)=0$，則 $f(2-i)\neq 0$
   (2) 至少有一實數 x 滿足 $f(x)=x$
   (3) 若 $-\dfrac{3}{2}$ 為方程式 $f(x)=0$ 的一根，則 2 是 a 的因數且 3 是 d 的因數
   (4) 若 $f(-1)f(1)>0$，則方程式 $f(x)=0$ 在 -1 與 1 之間沒有實根
   (5) 若 $f(x)\leq 0$ 的範圍為 $x\leq 1$，則方程式 $f(x)=0$ 有一實根與二虛根

9. 若實數 a、b、c、d 使得聯立方程組 $(L_1):\begin{cases}ax-9y=b\\ x+3y=4\end{cases}$ 有解，且聯立方程組 $(L_2):\begin{cases}-2x+cy=d\\ x+3y=4\end{cases}$ 無解，則下列哪些選項一定正確？
   (1) $a\neq 3$
   (2) $b=-12$
   (3) $c=-6$
   (4) $d=-8$
   (5) 聯立方程組 $\begin{cases}ax-9y=b\\ -2x+cy=d\end{cases}$ 無解

10. 已知 x、y 滿足聯立不等式 $\begin{cases} x+2y\geq 6 \\ x-y\geq 0 \\ 2x-y\leq 7 \end{cases}$，且目標函數 $f(x,y)=ax+y$ 在 $(4,1)$ 處有最小值，則實數 a 之值可為下列哪些選項？

(1) -3

(2) -1

(3) $\dfrac{1}{2}$

(4) 1

(5) 2

11. 在 ΔABC 中滿足 $\angle A>\angle B>\angle C$，則下列選項哪些正確？

(1) $\sin A>\sin B>\sin C$

(2) $\tan A>\tan B>\tan C$

(3) $\tan A+\tan B+\tan C>0$

(4) $\cos(A+C)<0$

(5) 若 $\angle A$ 為銳角，則 $\tan B\tan C>1$

12. 有一個公正的骰子，其各面上的點數分別為 1、2、3、5、8、13。今投擲此骰子 100 次，若此 100 次之點數和為偶數的情形有 n 種，則下列各項敘述哪些正確？

(1) n 是奇數

(2) n 是一個 78 位數

(3) n 的首位數字是 3

(4) n 的末位數字是 1

(5) $n>4^{100}$

13. 討論下列空間中三直線的關係：$L_1: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-8}{4}=\dfrac{z-4}{-1}$，$L_2: \dfrac{x-7}{-1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+1}{2}$，$L_3: \dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-7}{4}=\dfrac{z-5}{-1}$，下列何者正確？

(1) L_1與L_2垂直

(2) L_1、L_2爲相交兩直線且$L_1 // L_3$

(3) 若一平面E_1包含直線L_2與L_3，則$(3,-1,2)$爲平面E_1的一個法向量

(4) 直線$L: \begin{cases} \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-7}{-1} \\ \dfrac{y-7}{-1}=\dfrac{z-5}{2} \end{cases}$與$L_2$、$L_3$均垂直

(5) L_1與L_3之距離爲$\dfrac{\sqrt{14}}{7}$

第貳部分：選填題(占 35 分)

說明：1.第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(塡)題答案區」所標示的列號(14–31)。
2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

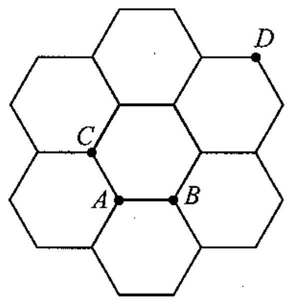
A. 設 x、y 爲實數，若 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-6)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+(y-2)^2}$ 有最小值，此時 $x+y=\dfrac{⑭⑮}{⑯}$。(請以最簡分數表示)

B. 將 5 個不同的球任意放入 A、B、C 三個箱子中，在 A、B 箱中總共放入 3 個球的條件下，則 A 箱中恰放入 1 球的條件機率爲 $\dfrac{⑰}{⑱}$。(請以最簡分數表示)

C. 若一正數數列 $<a_n>$ 滿足 $a_1=1$，其中 $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$，且 $\sqrt{S_{n-1}}+\sqrt{S_n}=a_n\ (n\ge 2)$，求 $S_{20}=$ ⑲⑳㉑ 。

D. 設 ΔABC 三邊長分別為 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=7$，$\overline{BC}=8$，以 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 為邊向外分別做兩個正三角形 ΔABD 與 ΔACE，則 ΔADE 面積為 $\dfrac{㉒㉓\sqrt{㉔}}{㉕}$。(請以最簡分數表示)

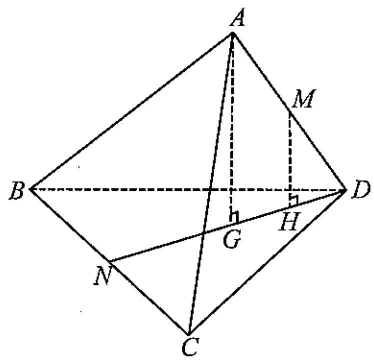
E. 圖(1)為全等之正六角形所形成的蜂巢，A、B、C、D 為其中四個頂點，P 點為 $\overline{BC}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點，求 $\dfrac{\Delta PCD面積}{\Delta PAB面積}$ 之值 = ㉖。



圖(1)

F. 圖(2)，邊長為 a 的正四面體 $A-BCD$，線段 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 的中點分別為 M、N，直線 $\overleftrightarrow{AG}$ 與 $\overleftrightarrow{MH}$ 分別垂直底面 BCD 於 G 和 H 點，若直線 $\overleftrightarrow{CM}$ 與底面 BCD 的銳夾角為 α，則 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{㉗}}{㉘}$。

(請以最簡分數表示)



圖(2)

G. 已知 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$，方程組 $\begin{cases} ax+by=3 \\ cx+dy=4 \end{cases}$ 恰有一解 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$，又方程組 $\begin{cases} ex+fy=2 \\ gx+hy=-4 \end{cases}$ 亦恰有一組解 $\begin{cases} x=m \\ y=n \end{cases}$，則數對 $(m,n)=$ (㉙, ㉚㉛)。

可能用到的參考公式及數值

1. 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$間的距離為 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
2. 通過 $P_1(x_1, y_1)$與 $P_2(x_2, y_2)$的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$x_2 \neq x_1$
3. 面積公式：ΔABC面積$=\dfrac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$
4. ΔABC的正弦及餘弦定理：
   (1) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，$R$ 為外接圓的半徑(正弦定理)
   (2) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$(餘弦定理)
5. 三角函數的和角公式：
   $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
   $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
   $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
   $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
6. 標準差：$\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}$
7. 相關係數：$r=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)^2}}$
8. 參考數值：$\sqrt{2}\approx1.414$；$\sqrt{3}\approx1.732$；$\sqrt{5}\approx2.236$；$\sqrt{6}\approx2.449$；$\pi\approx3.142$
9. 對數值：$\log_{10}2\approx0.3010$；$\log_{10}3\approx0.4771$；$\log_{10}5\approx0.6990$；$\log_{10}7\approx0.8451$

臺中區國立高級中學102學年度大學入學第二次學科能力測驗聯合模擬考

數學考科解析

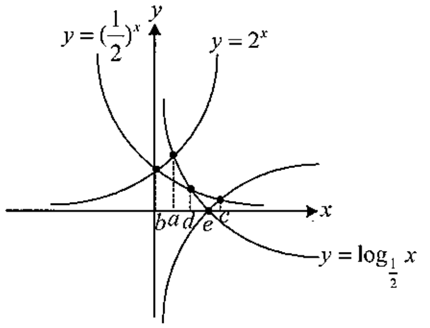
考試日期：102年12月23~24日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	4	3	3	1	2	13	12	3	23	145	235	34	1	4	5
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
3	8	4	0	0	1	5	3	4	8	2	3	2	–	2	

第壹部分：選擇題

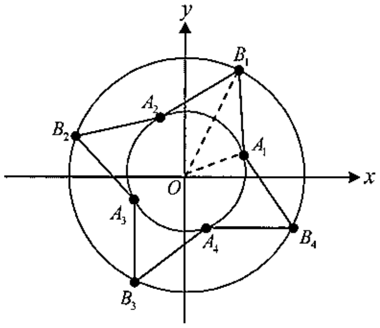
一、單選題

1.



故 $0=b<a<d<e=1<c$，選(5)

2.



∵每一線段均相同，

$\therefore \angle A_1OB_1=(90°-25°)-(90°-70°)=45°$

$\overline{A_1B_1}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+3^2-2\times\sqrt{2}\times3\times\cos45°}=\sqrt{5}$

故周長為 $8\sqrt{5}$，故選(4)

3. $\overrightarrow{AB}=(1,1,4)$

$\overrightarrow{AC}=(2,3,6)$

$\overrightarrow{AD}=(x-3,y-2,-1)$

四面體 $ABCD$ 的體積

$=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})|$

$=\frac{1}{6}|(x-3,y-2,-1)\cdot(-6,2,1)|$

$=\frac{1}{6}|-6x+2y+13|$

利用柯西不等式可知，

$[(3x)^2+y^2][(-2)^2+2^2]\geq(-6x+2y)^2$

$\Rightarrow 18\cdot8\geq(-6x+2y)^2$

$\Rightarrow -12\leq-6x+2y\leq12$

$\Rightarrow 1\leq-6x+2y+13\leq25$

則體積之最大值 $=\frac{25}{6}$，故選(3)

4. $2310=2\times3\times5\times7\times11\Rightarrow$ 所求相當於將 5 個相異物 $(2,3,5,7,11)$ 放入 3 個箱子 (a,b,c) 中(但不用考慮順序)，

至多 1 個空箱 $=\frac{3^5-3}{3!}=40$，故選(3)

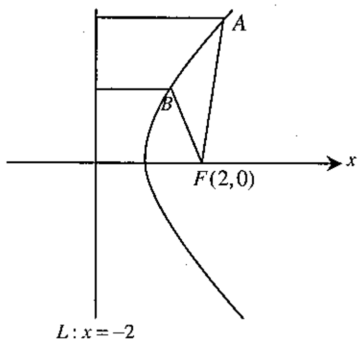
5. $\because xy+3x-y+2=(x-1)(y+3)+5$

$-1\leq x\leq5\Rightarrow-2\leq x-1\leq4$，$-3\leq y\leq3\Rightarrow0\leq y+3\leq6$

則 $-12\leq(x-1)(y+3)\leq24\Rightarrow-7\leq(x-1)(y+3)+5\leq29$

故 $M-m=29-(-7)=36$，故選(1)

6. Γ 的焦點 $F(2,0)$，準線 $L:x=-2$



$\because \overline{AF}=5\Rightarrow A$ 點的 x 坐標為 $-2+5=3$，

則 $y^2=8\times3\Rightarrow y=2\sqrt{6}$，

$\therefore A(3,2\sqrt{6})$

同理，$\because \overline{BF}=3\Rightarrow B$ 點的 x 坐標為 $-2+3=1$，

則 $y^2=8\times1\Rightarrow y=2\sqrt{2}$，

$\therefore B(1,2\sqrt{2})$

$\therefore \overrightarrow{FA}=(1,2\sqrt{6})$，$\overrightarrow{FB}=(-1,2\sqrt{2})$，

故 $a\Delta ABF=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}1 & 2\sqrt{6}\\-1 & 2\sqrt{2}\end{vmatrix}|=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，故選(2)

二、多選題

7. (1) 對：$x_i=2013-y_i\Rightarrow Max(x_i)=\min(y_i);\min(x_i)=Max(y_i)$

(2) 錯：不相同

(3) 對：$\sigma_x=\sigma_{2013-y}=\sigma_y$

(4) 錯：不相同

(5) 錯：$r_{x,y}=r_{x,2013-x}=-r_{x,x}=-1$

故選(1)(3)

8. (1) 對：$\because f(1+2i)=0$，即 $f(x)=0$ 有兩虛根 $1\pm2i$ 與另一實根 $\therefore 2-i$ 不會是 $f(x)=0$ 之根

(2) 對：$\because f(x)-x=0$ 亦為三次實係數方程式，則至少有一實根

(3) 錯：方程式必須為整係數才有此性質

(4) 錯：不確定是否沒有實根，有可能有偶數個實根

(5) 錯：$f(x)=0$ 也有可能有三個實根

故選(1)(2)

9. (1)(2) 方程組 $(L_1):\begin{cases}ax-9y=b\\x+3y=4\end{cases}$ 有解 $\Leftrightarrow\frac{a}{1}\neq\frac{-9}{3}$ (唯一解)或

$\frac{a}{1}=\frac{-9}{3}=\frac{b}{4}$ (無限多組解)

$\Leftrightarrow a\neq-3$ 或($a=-3$ 且 $b=-12$)

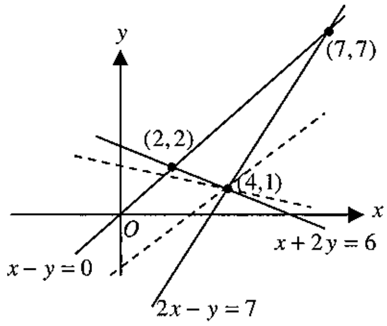
(3)(4) 方程組 $(L_2):\begin{cases}-2x+cy=d\\x+3y=4\end{cases}$ 無解 $\Leftrightarrow\frac{-2}{1}=\frac{c}{3}\neq\frac{d}{4}$

$\Leftrightarrow c=-6$ 且 $d\neq-8$

(5) $x+3y=4$ 與 $ax-9y=b$ 可能重合或相交於一點，但 $x+3y=4$ 與 $-2x+cy=d$ 平行

$\therefore ax-9y=b$ 與 $-2x+cy=d$ 可能平行或相交於一點，不一定無解，故選(3)

10.



令 $ax+y=k$ 的圖形爲斜率 $m=-a$，
y 截距爲 k，
故在 $(4,1)$ 處有最小值產生，則

$-\dfrac{1}{2}\le m\le 2\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le -a\le 2\Rightarrow -2\le a\le \dfrac{1}{2}$，故選(2)(3)

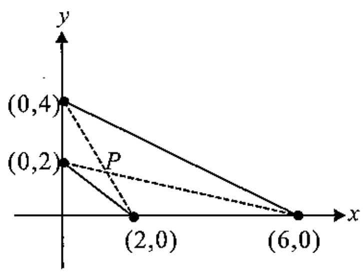
11. (1) 對：$\because \angle A>\angle B>\angle C\Rightarrow a>b>c\Rightarrow \sin A>\sin B>\sin C$
(2) 錯：若 $\angle A$ 爲鈍角，則 $\tan A<0$
(3) 錯：$\because \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$
(4) 對：$\because \angle B$ 必爲銳角
$\therefore \cos(A+C)=\cos(180^\circ-B)=-\cos B<0$
(5) 對：$\because \tan(B+C)=\tan(180^\circ-A)=-\tan A<0$
$\Rightarrow \dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}<0\Rightarrow 1-\tan B\tan C<0$
$\Rightarrow \tan B\tan C>1$
故選(1)(4)(5)

12. 點數爲奇數有 4 種，點數爲偶數有 2 種，
故 $n=C^{100}_{100}4^{100}+C^{100}_{98}4^{98}2^2+\ldots+C^{100}_{0}2^{100}$
$=\dfrac{(4+2)^{100}+(4-2)^{100}}{2}=\dfrac{6^{100}+2^{100}}{2}=3\times 6^{99}+2^{99}$
故 n 是偶數，末位數字 $=6$
又 $\log(3\times 6^{99})=\log 3+99\log 6=77.509$
$\Rightarrow 3\times 10^{77}<3\times 6^{99}<4\times 10^{77}$
$\log 2^{99}=99\log 2=29.799\Rightarrow 2^{99}<7\times 10^{29}$
故 n 是 78 位數
$\log 4^{100}=100\log 4=60.2<77\Rightarrow 4^{100}<n$，故選(2)(3)(5)

13. (1)(2) 解 $\begin{cases}3+2t=7-s\cdots\cdots ①\\8+4t=4+s\cdots\cdots ②\\4-t=-1+2s\cdots\cdots ③\end{cases}$ 由①與②解得 $t=0$，$s=4$
代入③不合，$\therefore L_1$、L_2 沒有交點
又 $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v_3}$ 且將 $(3,8,4)$ 代入 L_3 不合 $\therefore L_1 \,//\, L_3$
(3) $\overrightarrow{n_{E_1}} \,//\, \overrightarrow{v_2}\times\overrightarrow{v_3}=(-9,3,-6)$
(4) $L:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-7}{-1}=\dfrac{z-5}{2}$ 爲過 L_2 與 L_3 交點 $(4,7,5)$ 且 $(3,-1,2)$ 爲平面 E_1 的一個法向量
(5) 取 L_1 上點 $A(3,8,4)$，L_3 上點 $B(4,7,5)$
則 $d(L_1,L_3)=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{v_3}|}{|\overrightarrow{v_3}|}=\dfrac{3\sqrt{14}}{7}$
故選(3)(4)

第貳部分：選填題

A. $\begin{cases}2x+y=4\\x+3y=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\y=\dfrac{8}{5}\end{cases}$



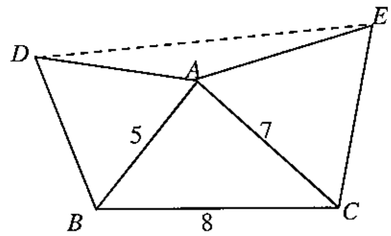
$P(\dfrac{6}{5},\dfrac{8}{5})$

故 $x+y=\dfrac{14}{5}$

B. X：A、B 箱總共放入 3 個球的事件；Y：A 箱放入 1 個球
$\Rightarrow P(X)=\dfrac{C^5_3\times 2^3}{3^5}=\dfrac{80}{243}$；$P(X\cap Y)=\dfrac{C^5_1C^4_2C^2_2}{3^5}=\dfrac{30}{243}$；
故 $P(Y|X)=\dfrac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\dfrac{3}{8}$

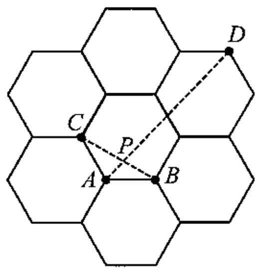
C. $S_n-S_{n-1}=a_n=\sqrt{S_{n-1}}+\sqrt{S_n}$
$\Rightarrow(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})\,(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})=\sqrt{S_{n-1}}+\sqrt{S_n}$
$\Rightarrow(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})=1$
$\therefore(\sqrt{S_2}-\sqrt{S_1})=1$
$(\sqrt{S_3}-\sqrt{S_2})=1$
$(\sqrt{S_4}-\sqrt{S_3})=1$
$\cdots$
$+\underline{(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})=1}$
$\therefore(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_1})=\sqrt{S_n}-\sqrt{a_1}=\sqrt{S_n}-1=(n-1)$
$\Rightarrow S_n=n^2\Rightarrow S_{20}=20^2=400$

D.

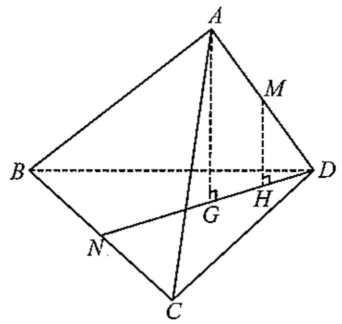


$\angle DAE=360^\circ-120^\circ-\angle BAC=240^\circ-A$
其中 $\cos A=\dfrac{5^2+7^2-8^2}{2\times5\times7}=\dfrac{1}{7}$，$\sin A=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$
故 $\sin(\angle DAE)=\sin(240^\circ-A)$
$=\sin 240^\circ\cos A-\cos 240^\circ\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$
則 ΔADE 面積 $=\dfrac{1}{2}\times5\times7\times\sin(\angle DAE)=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

E. $\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+3(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$
令 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AD}=4t\overrightarrow{AB}+3t\overrightarrow{AC}$
又 P、B、C 共線
$\therefore 4t+3t=1\Rightarrow t=\dfrac{1}{7}$
$\Rightarrow\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}}=\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\dfrac{3}{4}$
則 $\dfrac{\Delta PCD面積}{\Delta PAB面積}=\dfrac{\overline{PC}\times\overline{PD}}{\overline{PA}\times\overline{PB}}=8$



F.



ΔANG 中，$\overline{AN}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$\overline{NG}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$
$\therefore\overline{AG}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{3a^2}{36}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$，又 M 爲 $\overline{AD}$ 中點
$\therefore\overline{MH}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AG}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}a=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$

直線$\overleftrightarrow{CM}$與底面BCD的夾角即是ΔMCH中$\angle MCH=\alpha$

$$\therefore \sin\alpha=\frac{\overline{MH}}{\overline{MC}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

G. $\because \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$